Matematikrepetition inför Reglerteknik AK

Maria Karlsson

2005

I kursen Reglerteknik AK används en hel del matematik från gymnasiet och kurserna i Analys och Linjär algebra. Från tidigare år vet vi att en del studenter tycker att kursen i reglerteknik är svår i början eftersom man inte repeterat denna matematik på ett par år.

Här visar vi exempel på beräkningar du kommer att behöva göra under kursen. Om du är osäker på någonting här bör du repetera; på övningarna förutsätts att alla känner till det här materialet. Fråga gärna din övningsledare om du får problem med någon uppgift, men räkna vid behov dessa uppgifter hemma så att du inte kommer efter i de vanliga övningarna.

Ta med dig detta häfte till övningarna så att din övningsledare kan hänvisa hit om du kör fast på ett rent matematikproblem.

Komplexa tal

1.

a. Tag ut realdel $Re(z)$ och imaginärdel $Im(z)$ av talet

$$z = -2 + 3i$$

b. Rita in talet $z = 2 + 4i$ i komplexa talplanet.

c. Rita in talet $z = -1 + i$ i komplexa talplanet och markera i figuren absolutbeloppet och argumentet.

d. Beräkna absolutbelopp $|z|$ och argument $\arg(z)$ för talet $z = -1 + i$.

e. Skriv talet $z = -1 + i$ på polär form.

f. Tag ut realdel och imaginärdel av talet $z = 3e^{\pi i}$

2.

a. Beräkna $|e^{\omega i}|$, där ω är ett reellt tal.

b. Beräkna $\arg(e^{\omega i})$, där ω är ett reellt tal.

c. Beräkna $|-2(-1+2i)(-4-3i)|$

d. Beräkna $\arg(-2(-1+2i)(-4-3i))$

e. Beräkna $|\frac{2e^{-5i}(2-i)^2}{2i+3}|$

f. Beräkna $\arg(\frac{2e^{-5i}(2-i)^2}{2i+3})$

Andragradsekvationer

3. Lös ekvationen $x^2 - x + 4 = 0$

4. Lös ekvationen $3x^2 + 2x + 1 = 0$

Partialbråksuppdelning

5. Partialbråksuppdela

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

det vill säga skriv $f(x)$ på formen

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

där a och b är konstanter.

6. Partialbråksuppdela

$$f(x) = \frac{3x+11}{(x+1)(x-3)(x+2)}$$

7. Partialbråksuppdela

$$f(x) = \frac{2}{x^2+3x+2}$$

Matriser

8.

a. Beräkna produkten av matriserna A och B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

b. Beräkna produkten av matriserna A och B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c. Beräkna produkten av matriserna A och B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

9. Beräkna determinanten till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Invertera matrisen A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

11.

a. Beräkna egenvärden till matrisen A i uppgift 10.

b. Beräkna egenvärden till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

12.

a. Följande ekvationssystem är givet

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Skriv detta på formen $Ax = B$, där A är en matris, B är en vektor och x har formen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b. Skriv ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

på formen $Ax = B$.

Taylorserieutveckling

13.

a. Taylorutveckla funktionen $f(x) = x^2$ i punkten $x = 2$ upp till första ordningens termer.

b. Taylorutveckla funktionen $f(x,u) = 5\sqrt{3x} + \sin(u)$ i punkten $x = 3$, $u = \pi$ upp till första ordningens termer.

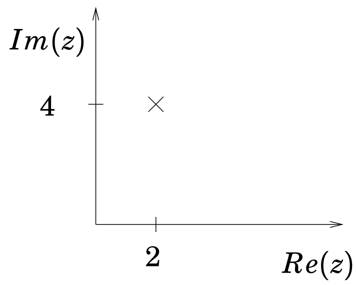
Lösningar

Komplexa tal

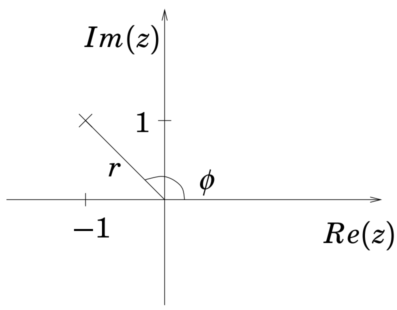
1.

a. $Re(z) = -2$, $Im(z) = 3$. Observera att imaginärdelen *inte* är $3i$.

b. Se figur 1.



Figur 1



Figur 2

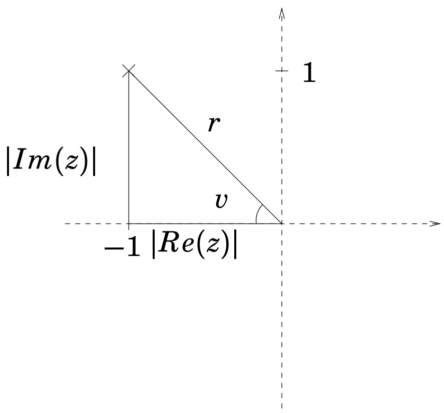
c. Se figur 2. Absolutbeloppet $|z| = r$ är avståndet till origo, argumentet $\arg(z) = \phi$ är vinkeln till positiva reella axeln.

d. *Absolutbeloppet* $|z|$: Vi kan se från figur 2 att absolutbeloppet $|z|$ är hypotenusan i en rätvinklig triangel där de båda övriga sidorna har längderna $|Re(z)|$ och $|Im(z)|$, se figur 3. Från Pythagoras sats kan vi nu beräkna $|z|$ som

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

Denna formel gäller för att beräkna absolutbeloppet för alla komplexa tal z. I vårt fall har vi $Re(z) = -1$ och $Im(z) = 1$ och får $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Argumentet $\arg(z)$: Vi beräknar här argumentet i radianer. Vinkeln ϕ i figur 2 kan beräknas som $\phi = \pi - v$ där v är vinkeln i triangeln i figur 3. Vi kan



Figur 3

nu använda att

$$\tan(v) = \frac{Im(z)}{|Re(z)|} \implies v = \arctan\left(\frac{Im(z)}{|Re(z)|}\right)$$

Vi får $v = \arctan(1/1) = \arctan 1 = \pi/4$, och således $\phi = \pi - v = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

e. Ett tal z skrivs på polär form som $z = |z|e^{\arg(z)i}$. Från d-uppgiften vet vi att $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = 3\pi/4$, så det gäller att $z = -1 + i = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$.

f. Vi kan skriva z som

$$z = 3e^{\pi i} = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$$

Vi ser nu att $Re(z) = -3$, $Im(z) = 0$.

2.

a.

$$|e^{\omega i}| = |\cos(\omega) + i\sin(\omega)| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = \sqrt{1} = 1$$

Detta resultat är bra att lära sig utantill.

b. Talet $e^{\omega i}$ är ett komplext tal med absolutbeloppet 1 och argumentet ω, skrivet på polär form. Därmed gäller det att

$$\arg(e^{\omega i}) = \omega$$

Även detta resultat är bra att lära sig utantill.

c.

$$|-2(-1+2i)(-4-3i)| = |-2| \cdot |-1+2i| \cdot |-4-3i| =$$
$$2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{5}\sqrt{25} = 10\sqrt{5} \approx 22.36$$

d. För argument gäller samma räkneregler som för logaritmer, t.ex.

$$\arg(xy^2/z) = \arg(x) + 2\arg(y) - \arg(z)$$

Vi får då

$$\begin{gathered}\arg(-2(-1+2i)(-4-3i)) = \arg(-2) + \arg(-1+2i) + \arg(-4-3i) = \\ \pi + (\pi + \arctan(2/-1)) + (\pi + \arctan(-3/-4)) = \\ 3\pi + \arctan(-2) + \arctan(3/4) \approx 8.96\end{gathered}$$

e.

$$\left|\frac{2e^{-5i}(2-i)^2}{2i+3}\right| = \frac{2|e^{-5i}||2-i|^2}{|2i+3|} = \frac{2\cdot 1(2^2+(-1)^2)}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} \approx 2.77$$

f.

$$\begin{gathered}\arg\left(\frac{2e^{-5i}(2-i)^2}{2i+3}\right) = \arg(2) + \arg(e^{-5i}) + 2\arg(2-i) - \arg(2i+3) = \\ 0 + (-5) + 2\arctan(-1/2) - \arctan(2/3) \approx -3.51\end{gathered}$$

Andragradsekvationer

3. Lösningarna till ekvationen $x^2 + px + q = 0$, där p och q är konstanter, ges av formeln

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

I vårt fall har vi $p = -1$, $q = 4$, och får lösningarna

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{15}{4}} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2} \approx 0.5 \pm 1.94i$$

4. För att kunna använda den allmänna formeln för att lösa andragradsekvationer delar vi först ekvationen med 3, och får

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

Med formeln i uppgift 3 ($p = 2/3$, $q = 1/3$) fås nu

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3} \approx -0.33 \pm 0.47i$$

Partialbråksuppdelning

5. Antag att $f(x)$ kan skrivas på den givna formen,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

Sätt nu de två termerna på gemensamt bråkstreck,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x(a+b)+2a+b}{(x+1)(x+2)}$$

För att detta ska stämma med den givna funktionen $f(x)$ måste det nu gälla att

$$a+b=0$$
$$2a+b=1$$

Genom att lösa ekvationssystemet fås $a=1$ och $b=-1$, och det gäller att

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

6. På samma sätt som i den förra uppgiften får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+11}{(x+1)(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+2} \\ &= \frac{a(x-3)(x+2)+b(x+1)(x+2)+c(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{x^2(a+b+c)+x(-a+3b-2c)-6a+2b-3c}{(x+1)(x-3)(x+2)} \end{aligned}$$

Vi kan nu lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} a+b+c&=0 \\ -a+3b-2c&=3 \\ -6a+2b-3c&=11 \end{aligned}$$

Genom att t.ex. använda miniräknare eller göra variabelsubstitution för hand kan vi hitta lösningen som $a=-2$, $b=1$, $c=1$. Det gäller då att

$$f(x) = \frac{3+11x}{(x+1)(x-3)(x+2)} = -\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+2}$$

7. Beräkna först rötterna till nämnarpolynomet

$$x^2+3x+2=0 \implies x_1=-1, \quad x_2=-2$$

Vi kan nu skriva $f(x)$ som

$$f(x) = \frac{2}{x^2+3x+2} = \frac{2}{(x+1)(x+2)}$$

På samma sätt som i tidigare uppgifter får vi nu

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x(a+b)+2a+b}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

Vi kan nu lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a + b &= 2 \end{aligned}$$

och får $a = 2$, $b = -2$. Det gäller alltså att

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2}$$

Matriser

8.

a.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & -1 \cdot -2 + 0 \cdot -5 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot -2 + 2 \cdot -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}$$

b.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & -1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

c.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 + 0 \cdot -5 \end{pmatrix} = -4$$

9.

$$\det(A) = -2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4$$

Formeln för att beräkna determinanten för en $2 * 2$-matris finns i formelsamlingen.

10.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Formeln för att beräkna inversen till en $2*2$-matris finns i formelsamlingen.

11.

a. Egenvärdena λ till en matris A ges av ekvationen (som står angiven i formelsamlingen)

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Här får vi

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix}\right)$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 4) - (-2) \cdot (-3) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

Genom att lösa andragradsekvationen får vi

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2} \implies \lambda_1 = -0.37, \ \lambda_2 = 5.37$$

b. Här är A en diagonal matris och egenvärdena är därmed desamma som diagonalelementen, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$.

12.

a. Ekvationssystemet kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket är detsamma som

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Ekvationssystemet kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Taylorserieutveckling

13.

a. En funktion $f(x)$ kan utvecklas i en Taylorserie kring punkten a, dvs skrivas som

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x-a)^2 + \dots$$

Vi kan sedan få en approximation av funktionen $f(x)$ som stämmer bra kring $x = a$ genom att bara räkna med några av de första termerna i den oändliga Taylorserien.

I vår uppgift vill vi utveckla $f(x)$ till första ordningens termer, dvs de första två termerna i Taylorserien. Vi vill utveckla $f(x)$ kring punkten $x = 2$, dvs $a = 2$.

Vi får då

$$f(x) \approx f(2) + \frac{df}{dx}(2)(x-2)$$

Vi har

$$f(2) = 4, \quad \frac{df}{dx} = 2x, \quad \frac{df}{dx}(2) = 4$$

och får

$$f(x) \approx 4 + 4(x-2) = 4(x-1)$$

b. Här är $f(x,u)$ en funktion av två variabler och Taylorserieutvecklingen i punkten $x = a$, $u = b$ ges av

$$f(x,u) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)(u-b) +$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(a,b)(x-a)(u-b) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a,b)(u-b)^2 + \dots$$

Då vi ska räkna upp till första ordningens termer tar vi med den konstanta termen $f(a,b)$ samt de termer som innehåller förstaderivator av $f(x,u)$. Vi får då

$$f(x,u) \approx f(3,\pi) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,\pi)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial u}(3,\pi)(u-\pi)$$

Vi har

$$f(3,\pi) = 15 - 0 = 15, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 5\sqrt{3}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3,\pi) = \frac{5}{2} = 2.5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \cos(u) \quad \frac{\partial f}{\partial u}(3,\pi) = -1$$

och får då

$$f(x,u) \approx 15 + 2.5(x-3) - 1(u-\pi) \approx 10.64 - 2.5x - u$$