Lektion 1

- Kursinnehåll - kursprogram - schema
- Det praktiska - boken - idag sid 71-101
- Mattebakgrund - Spannes Blixtkurs
- Laplacetransform AK 17
- Koppling till tillståndsbeskrivning AK 18
  Betoning av transienter och inverkan av initialtillstånd
- AKbakgrund - frekvenskurvor AK 27-39

Kursen framöver

28 jan	Laplacetransform och Frekvenskurvor.
4 feb	Argumentvariation, Nyquistteoremet, Bodes relationer
11 feb	Stabilitet, robusthet, känslighetsfunktionen
	v7 INLäMNING 1: Laplacetransform och Frekvenskurvor.
18 feb	Koordinatbyte i tillståndsrummet, nollställen, tillståndsåterkoppling, observerare
25 feb	Styrbarhet och observerbarhet, Kalmans uppdelningssats
3 mar	Linjära avbildningar och minsta-kvadrat-problem
	v10 INLäMNING 2: Tillståndsbeskrivningar

Redovisning INL1: v7(?) Ingen redovisning INL2

Mattebakgrund - Spannes Blixtkurs

- $\int_C f(z)dz, C : \{z(t), t \in [a, b]\}, \int_a^b f(z)\frac{dz}{dt}dt,$
  återför på flerdim
- $f(z) = \frac{1}{z-a}, C : \{z(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$, enda exemplet
- $f(z)$ analytisk, sluten kurva, Cauchys integralsats,
  olika vägar lika, deformation av integrationsväg
- $\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a)2\pi i$, Cauchys integralformel
- $\{z_k\}_1^n$ poler innanför C till $f(z)$, $\int_C = \int_{C_1} + \cdots + \int_{C_n}$,
  $\text{Res}_{z=z_i} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} f(z)dz$, residuekalkyl

Laplacetransform

- Dubbelsidig/enkelsidig - Kausala system
- Definitionsremsa. Olika för olika signaler?
- Överföringsfunktion. Oberoende av insignal?
- Enkelsidig plus analytisk fortsättning
- Klarar även instabila system

Laplacetransform - definition - konvergens

Dubbelsidig: Betrakta tidsfunktioner $f(t)$, $-\infty < t < \infty$

$$F(s) = (\mathcal{L}_{II} f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Konvergerar i remsa $\Omega: \ \alpha < Re\ s < \beta$, $\quad F(s)$ analytisk i Ω.

$f(t)e^{-\alpha t} \to 0, \quad t \to \infty$, och $\quad f(t)e^{-\beta t} \to 0, \quad t \to -\infty$.

Tex $\alpha < 0$ och $\beta > 0$ kräver exp. konvergens $t \to \infty$, och $t \to -\infty$.

Enkelsidig: Betrakta tidsfunktioner $f(t)$, $0 \leq t < \infty$

$$F(s) = (\mathcal{L}_{I} f)(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Konvergerar i halvplan $\Omega: \ \alpha < Re\ s$, $\quad F(s)$ analytisk i Ω.

$f(t)e^{-\alpha t} \to 0, \quad t \to \infty$, dvs $\alpha > 0$ tillåter $f(t) \to \infty, \quad t \to \infty$.

Laplacetransform - kausalitet

Observera att

$$\mathcal{L}_I \frac{df}{dt} = sF(s) - f(0)$$

Viktfunktion

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$h(\tau), \quad 0 \le \tau < \infty$$

$$G(s) = (\mathcal{L}_I h)(s)$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Laplacetransform - exempel

$$f(t) = e^{2t},\ t \geq 0, \quad F = \mathcal{L}\{f\}, \quad F(s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{2t} e^{-st} dt$$

$$F(s) = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{2-s} e^{(2-s)t} \right]_0^T = \frac{1}{2-s} \lim_{T\to\infty} \left\{ e^{(2-s)T} - 1 \right\}$$

$$\lim_{T\to\infty} e^{(2-s)T} = 0, \quad Re\, s > 2$$

Alltså

$$F(s) = \frac{1}{s-2}, \quad Re\, s > 2$$

Utvidga def-området med analytisk fortsättning till $\mathbf{C} - \{s = 2\}$, enda möjliga funktionen.

Transientter och initialtillstånd

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad\qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx + Du$$

Laplacetransformering ger

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}(BU(s) + x_0)$$
$$Y = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{G(s)}U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$$

Exempel: Sinus in och inverkan av initialtillstånd

$$\dot{x} = -x + u \qquad x(0) = x_0 \qquad u(t) = \sin t$$

ger efter Laplacetransformering

$$sX(s) - x(0) = -X(s) + U(s) \qquad U(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Här kan X lösas ut:

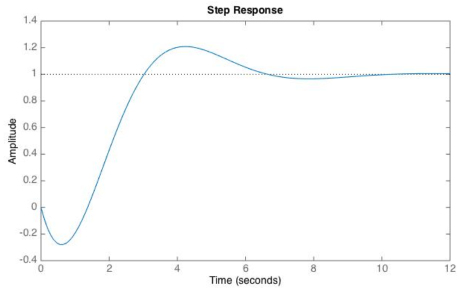
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+1}(U(s) + x_0) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s^2+1} + x_0\right) \\ &= \frac{0.5 - 0.5s}{s^2+1} + \frac{0.5 + x_0}{s+1} \end{aligned}$$

Inverstransformering ger

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + (x_0 + \frac{1}{2})e^{-t}$$

Laplacetransform i Matlab (eller Maple)

```
>> s=tf('s')
>> G = (1-s)/(s^2+s+1)
G =
     -s + 1
  -----------
  s^2 + s + 1
>> step(G)
```



Laplacetransform i Matlab (eller Maple)

```
>> clear s
>> syms s t x0

>> ilaplace((1-s)/(s^2+s+1))
ans =
-exp(-t/2)*(cos((3^(1/2)*t)/2) - 3^(1/2)*sin((3^(1/2)*t)/2

>> ilaplace((0.5-0.5*s)/(s^2+1) + (0.5+x0)/(s+1))
ans =
sin(t)/2 - cos(t)/2 + exp(-t)*(x0 + 1/2)

>> latex(ans)
```

$$\frac{\sin(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \mathrm{e}^{-t}\,\left(\mathrm{x0} + \frac{1}{2}\right)$$

Begynnelse- och Slutvärdessatserna

Begynnelsevärdessatsen. Antag att f är kausal och att Laplacetransformen F är rationell strikt proper. Då är

$$\lim_{t \to +0} f(t) = \lim_{s \to +\infty} sF(s)$$

Slutvärdessatsen. Antag att f är kausal med rationell Laplacetransform F. Om alla poler till $sF(s)$ har negativ realdel, så är

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to +0} sF(s)$$

Bevisskiss för rationella $F(s)$: Sant om $F(s) = (s-p)^k$. Använd partialbråksuppdelning av $F(s)$.

Bevis av (lite mer generell) slutvärdessats

Om $\dfrac{f(t)}{e^{at} t^k} \to C \in \mathbb{R}$ då $t \to \infty$

så är $g(t) := \dfrac{f(t)}{e^{at} t^k}$ begränsad för stora t

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} t^k g(t)\, dt = \left[\begin{array}{l} x = (s-a)t \\ s > a \\ s \text{ reell} \end{array} \right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^k}{(s-a)^k} g\left(\frac{x}{s-a}\right) \frac{dx}{s-a}$$

$$\underline{\underline{\lim_{s \to a^+} (s-a)^{k+1} F(s)}} = \lim_{s \to a^+} \int_0^\infty e^{-x} x^k g\left(\frac{x}{s-a}\right) dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} g(t) \int_0^\infty e^{-x} x^k\, dx$$

$$= \underline{\underline{\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{e^{at} t^k} \Gamma(k+1)}}$$

Krav: $k+1 > 0$

Glidande kloss - Var stannar den?

En kloss glider enligt

$$\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) = 0 \tag{1}$$

med startläge $y(0) = a$ och hastighet $\dot{y}(0) = b$. Bestäm $\lim_{t\to\infty} y(t)$!
Laplacetransformering av (1) ger

$$0 = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + c[sY(s) - y(0)]$$
$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + cy(0)}{s^2 + cs}$$

Slutvärdesteoremet ger

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to+0} sY(s) = \lim_{s\to+0} \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + cy(0)}{s + c}$$
$$= \frac{\dot{y}(0) + cy(0)}{c} = \frac{b}{c} + a$$

Rötter - Stabilitet

Lösningar till diff. ekvationen

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

Kar. polynom

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Om $a(\alpha) = 0$ så är $y(t) = Ce^{\alpha t}$ en lösning till diff. ekvationen

Allmän lösning

$$y(t) = \sum_k C_k(t) e^{\alpha_k t}$$

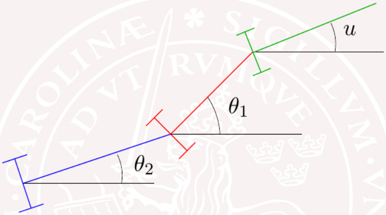
Om α_k rot multiplicitet m så C_k polynom av gradtal $m-1$

$y(t) \to 0$ om alla rötter ligger i öppna vänstra halvplanet

Egenvärden - Stabilitet

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\det(sI - A)} C \operatorname{adj}(sI - A)B$$

Egenvärden: $\det(sI - A) = 0$.



$$\begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Hur beror egenvärdena på hastigheten v?

AKbakgrund – Frekvenskurvor

- Frekvenskurvor
  $u(t) = \sin \omega t$, $y(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$
  $A(\omega) = |G(i\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg G(i\omega)$
- Representation av $G(s)$ och $G(i\omega)$
- Nyquistdiagram - komplexa talet $G(i\omega)$
- Bodediagram – $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$
  $G = G_1 G_2 G_3 G_4 \ldots$

Värmeledande stav

Temperaturen i en värmeledande stav beskrivs av

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$$

där κ är den termiska diffusiviteten. Med Laplacetransformen

$$Z(s,x) = \int_0^\infty e^{-st} z(t,x)dt$$

kan ekvationen skrivas $sZ = \kappa \frac{d^2 Z}{dx^2}$ med lösningen

$$Z(s,x) = Ae^{-x\sqrt{s/\kappa}} + Be^{x\sqrt{s/\kappa}}.$$

För en oändligt lång stav med ändlig tempertur måste $B = 0$.
Temperaturen $y(t)$ i punkten $x = a$ ges då av

$$Y(s) = e^{-a\sqrt{s/\kappa}} U(s)$$

där $U(s)$ är Laplacetransformen av ändpunktstemperaturen $u(t)$.

Kursen framöver

28 jan	Laplacetransform och Frekvenskurvor.
4 feb	Argumentvariation, Nyquistteoremet, Bodes relationer
11 feb	Stabilitet, robusthet, känslighetsfunktionen
	v7 INLäMNING 1: Laplacetransform och Frekvenskurvor.
18 feb	Koordinatbyte i tillståndsrummet, nollställen, tillståndsåterkoppling, observerare
25 feb	Styrbarhet och observerbarhet, Kalmans uppdelningssats
3 mar	Linjära avbildningar och minsta-kvadrat-problem
	v10 INLäMNING 2: Tillståndsbeskrivningar

Redovisning INL1: v7(?) Ingen redovisning INL2