

Förra veckan

- Frekvenskurvor
- Integration i komplexa talplanet
- Laplacetransform - dubbelsidig och enkelsidig
- Inverkan av initialtillstånd

Begynnelse- och Slutvärdessatserna

Begynnelsevårdessatsen. Antag att f är kausal och att Laplacetransformen F är rationell strikt proper. Då är

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Slutvärdessatsen. Antag att f är kausal med rationell Laplacetransform F . Om alla poler till $sF(s)$ har negativ realdel, så är

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow +0} sF(s)$$

Se Spanne's Linjära System, sidan 322:

Glidande kloss - Var stannnar den?

En kloss glider enligt

$$\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) = 0 \quad (1)$$

med startläge $y(0) = a$ och hastighet $\dot{y}(0) = b$. Bestäm $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$! Laplacetransformering av (1) ger

$$0 = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + c[sY(s) - y(0)]$$

$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + cy(0)}{s^2 + cs}$$

Slutvärdesteoremet ger

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow +0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow +0} \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + cy(0)}{s + c}$$

$$= \frac{\dot{y}(0) + cy(0)}{c} = \frac{b}{c} + a$$

Dagens föreläsning

- Argumentvariationsprincipen
- Nyquistkriteriet
- Exempel: Vagnståget
- Exempel: Återkoppling med tidsfördröjning
- Bodes relationer

Argumentvariation

Låt Γ vara en enkel sluten kurva i komplexa talplanet och låt D vara det omslutna området.

Förändringen i argument för den komplexa funktionen $F(s)$ då randen till D följs moturs, kallas argumentvariationen för F längs Γ och skrivs $\Delta_\Gamma \arg F$:

$$\Delta_\Gamma \arg F := \int_\Gamma \left(\frac{d}{ds} \arg F(s) \right) ds$$

Argumentvariationsprincipen

Antag att F är analytisk i en omgivning till D bortsett från ett ändligt antal poler i D . Då är

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F = N - P$$

där N är antalet nollställen och P är antalet poler för F i D .

Bevis av argumentvariationsprincipen

Argumentet imaginärdelen av logaritmen, så

$$\Delta_\Gamma \arg F = \int_\Gamma \left(\frac{d}{ds} \arg F(s) \right) ds$$

$$= \operatorname{Im} \int_\Gamma \left(\frac{d}{ds} \log F(s) \right) ds = \operatorname{Im} \int_\Gamma \frac{F'(s)}{F(s)} ds$$

F'/F är singulär precis i polerna och nollställena till F .

Bevis av argumentvariationsprincipen

$$F(s) = \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_N)}{(s - p_1) \cdots (s - p_P)} G(s)$$

where G has no poles and zeros in D . Then

$$\log F(s) = \sum_{j=1}^N \log(s - z_j) - \sum_{j=1}^P \log(s - p_j) + \log G(s)$$

Derivering och integrering ger

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{s - z_j} - \sum_{j=1}^P \frac{1}{s - p_j} + \frac{G'(s)}{G(s)} \right) ds = N - P$$

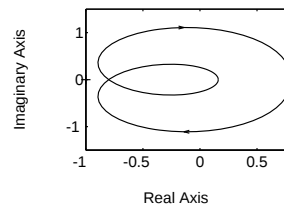
Dagens föreläsning

- Argumentvariationsprincipen
- Nyquistkriteriet**
- Exempel: Vagnståget
- Exempel: Återkoppling med tidsfördröjning
- Bodes relationer

Nyquistkriteriet

Om $L(s)$ är stabil, så är slutna systemet $[1 + L(s)]^{-1}$ stabilt om och endast om Nyquistkurvan $L(i\omega)$ inte omcirklar -1 .

Mer generellt: Skillnaden mellan antalet instabila poler i $[1 + L(s)]^{-1}$ och antalet instabila poler i $L(s)$ bestäms av antalet gånger punkten -1 omcirklas av Nyquistkurvan medurs.



Bevis av Nyquistkriteriet

Tillämpa argumentvariationsprincipen på

$$F(s) = 1 + L(s)$$

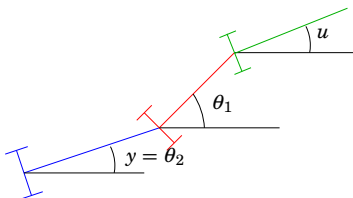
där D är det inre av en halvcirkel med centrum i origo, tillräckligt stor för att omsluta alla poler och nollställen i högra halvplanet. Då är

$$\begin{aligned} P &= \text{antalet instabila poler till } L(s) \\ N &= \text{antalet instabila poler till } [1 + L(s)]^{-1} \\ \frac{1}{2\pi} \Delta \arg F &= \text{antalet gånger punkten } -1 \text{ omcirklas av Nyquistkurvan } L(i\omega) \text{ medurs} \end{aligned}$$

Dagens föreläsning

- Argumentvariationsprincipen
- Nyquistkriteriet
- Exempel: Vagnståget**
- Exempel: Återkoppling med tidsfördröjning
- Bodes relationer

Exempel: Vagnståg

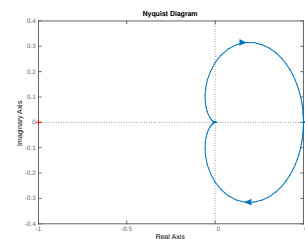


Vid rörelse framåt med hastighet $v = 1$:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} U(s)$$

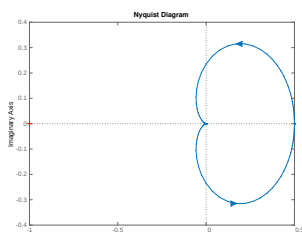
Exempel: Vagnståg vid framåtkörning

P-reglering vid körning framåt: $U(s) = k[R(s) - Y(s)]$. Stabilt om $L(i\omega) = k \frac{1}{(i\omega+2)(i\omega+1)}$ ej omcirklar -1 . Sant för alla $k > 0$.



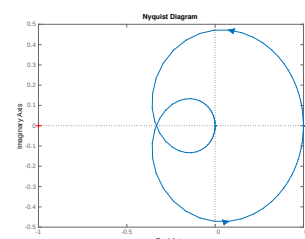
Exempel: Vagnståg vid bakåtkörning

P-reglering vid körning bakåt: $U(s) = k[R(s) - Y(s)]$. Stabilt om $L(i\omega) = k \frac{1}{(i\omega-2)(i\omega-1)}$ omcirklar -1 två varv moturs. Aldrig sant.



Exempel: Vagnståg vid bakåtkörning

PD-reglering vid körning bakåt: $U(s) = k(1+s)[R(s) - Y(s)]$. Stabilt om $L(i\omega) = k \frac{1+i\omega}{(i\omega-2)(i\omega-1)}$ omcirklar -1 två varv moturs. Sant om $k > 3$.



Dagens föreläsning

- ▶ Argumentvariationsprincipen
- ▶ Nyquistkriteriet
- ▶ Exempel: Vagnståget
- ▶ **Exempel: Återkoppling med tidsfördröjning**
- ▶ Bodes relationer

Exempel: System med tidsfördröjning

Är systemet

$$\dot{y}(t) = y(t) - 2y(t - 0.5) + u(t)$$

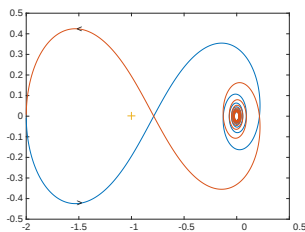
stabil?

Hur ser ett stegsvar ut?

Exempel: System med tidsfördröjning

$$\dot{y}(t) = y(t) - 2y(t - 0.5) + u(t)$$

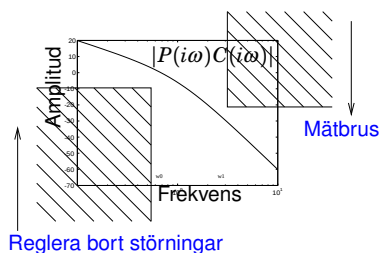
Stabilt, eftersom $L(i\omega) = \frac{2e^{-i\omega}}{i\omega - 1}$ omcirklar -1 ett varv moturs.



Dagens föreläsning

- ▶ Argumentvariationsprincipen
- ▶ Nyquistkriteriet
- ▶ Exempel: Vagnståget
- ▶ Exempel: Återkoppling med tidsfördröjning
- ▶ **Bodes relationer**

En reglerteknisk krets ska typiskt ha hög förstärkning $|P(i\omega)C(i\omega)|$ vid låga frekvenser för att ta bort störningar och följa referenssignalen, men låg förstärkning vid höga frekvenser för att undvika stabilitetsproblem och effekterna av mätbrus.



Hur snabbt kan man gå från hög till låg förstärkning?

Bodes relationer — Approximativ version

Om $G(s)$ är stabil och saknar nollställen i högra halvplanet så gäller

$$\arg G(i\omega_0) \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} \bigg|_{\omega=\omega_0}$$

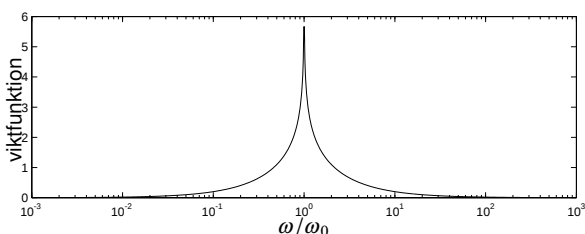
Med nollställen i högra halvplanet blir argumentet ännu mindre.

Slutsats: Lutningen på amplitudkurvan måste vara klart mindre än 2 nära skärfrekvensen (där amplituden är ett). Annars kommer Nyquistkurvan att omcirkla -1 .

Bode's relation — Exakt version

Om G är stabil och utan nollställen i högra halvplanet så gäller

$$\arg G(i\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} \underbrace{\log \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|}_{\text{viktfunktion}} d \log \omega$$



Dagens föreläsning

- ▶ Argumentvariationsprincipen
- ▶ Nyquistkriteriet
- ▶ Exempel: Vagnståget
- ▶ Exempel: Återkoppling med tidsfördröjning
- ▶ **Bodes relationer**