

Lektion 1

- Kursinnehåll - kursprogram
- Det praktiska - boken - idag **sid 71-101**
- AKbakgrund - frekvenskurvor **AK 27-39**
- Mattebakgrund - Spannes Blixtkurs
- Laplacetransform **AK 17**
- Koppling till tillståndsbeskrivning **AK 18**
Betonning av transienter och inverkan av initialtillstånd

AKbakgrund – Frekvenskurvor

- Frekvenskurvor
 $u(t) = \sin \omega t$, $y(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$
 $A(\omega) = |G(i\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg G(i\omega)$
- Representation av $G(s)$ och $G(i\omega)$
- Nyquistdiagram - komplexa talet $G(i\omega)$
- Bodediagram – $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$
 $G = G_1 G_2 G_3 G_4 \dots$

Mattebakgrund - Spannes Blixtkurs

- $\int_C f(z) dz$, $C : \{z(t), t \in [a, b]\}$, $\int_a^b f(z) \frac{dz}{dt} dt$,
återför på flerdim
- $f(z) = \frac{1}{z-a}$, $C : \{z(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$, **enda exemplet**
- $f(z)$ analytisk, slutna kurva, Cauchys integralsats,
olika vägar lika, **deformation av integrationsväg**
- $\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) 2\pi i$, **Cauchys integralformel**
- $\{z_k\}_1^n$ poler innanför C till $f(z)$, $\int_C = \int_{C_1} + \dots + \int_{C_n}$,
 $\text{Res}_{z=z_i} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} f(z) dz$, **residuekalkyl**

Laplacetransform

- Dubbelsidig/enkelsidig - Kausala system
- Definitionsremsa. Olika för olika signaler?
- Överföringsfunktion. Oberoende av insignal?
- Enkelsidig plus analytisk fortsättning - Ex
- Klarar även instabila system

Laplacetransform - definition - konvergens

Dubbelsidig: Betrakta tidsfunktioner $f(t)$, $-\infty < t < \infty$

$$F(s) = (\mathcal{L}_I f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Konvergerar i remsa $\Omega : \alpha < \text{Re } s < \beta$, $F(s)$ analytisk i Ω .

$$f(t)e^{-\alpha t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{och} \quad f(t)e^{-\beta t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty.$$

Tex $\alpha < 0$ och $\beta > 0$ kräver exp. konvergens $t \rightarrow \infty$, och $t \rightarrow -\infty$.

Enkelsidig: Betrakta tidsfunktioner $f(t)$, $0 \leq t < \infty$

$$F(s) = (\mathcal{L}_I f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Konvergerar i halvplan $\Omega : \alpha < \text{Re } s$, $F(s)$ analytisk i Ω .

$$f(t)e^{-\alpha t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{dvs } \alpha > 0 \text{ tillåter } f(t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Laplacetransform - kausalitet

Observera att

$$\mathcal{L}_I \frac{df}{dt} = sF(s) - f(0)$$

Viktfunktion

$$y(t) = \int_0^t h(t-s)u(s)ds = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$h(\tau), \quad 0 \leq \tau < \infty$$

$$G(s) = (\mathcal{L}_I h)(s)$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Laplacetransform - exempel

$$f(t) = e^{2t}, \quad t \geq 0, \quad F = \mathcal{L}\{f\}, \quad F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{2t} e^{-st} dt$$

$$F(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2-s} e^{(2-s)t} \right]_0^T = \frac{1}{2-s} \lim_{T \rightarrow \infty} \{ e^{(2-s)T} - 1 \}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{(2-s)T} = 0, \quad \text{Res } s > 2$$

Alltså

$$F(s) = \frac{1}{s-2}, \quad \text{Res } s > 2$$

Utvidga defområdet med analytisk fortsättning till $C - \{s = 2\}$,
enda möjliga funktionen.

Transienter och initialtillstånd

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Laplacetransformering ger

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(BU(s) + x_0)$$

$$Y = CX + DU = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{G(s)} U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$$

Exempel: Sinus in och inverkan av initialtillstånd

$$\dot{x} = -x + u \quad x(0) = x_0 \quad u(t) = \sin t$$

ger efter Laplacetransformering

$$sX(s) - x(0) = -X(s) + U(s) \quad U(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Här kan X lösas ut:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+1}(U(s) + x_0) = \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{s^2+1} + x_0 \right) \\ &= \frac{0.5 - 0.5s}{s^2+1} + \frac{0.5 + x_0}{s+1} \end{aligned}$$

Inverstransformering ger

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t + (x_0 + \frac{1}{2})e^{-t}$$

Begynnelse- och Slutvärdessatserna

Begynnelsevärdessatsen. Antag att f är kausal och att Laplacetransformen F är rationell strikt proper. Då är

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

Slutvärdessatsen. Antag att f är kausal med rationell Laplacetransform F . Om alla poler till $sF(s)$ har negativ realdel, så är

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow +0} sF(s)$$

Se Spanne's Linjära System, sidan 322:

Glidande kloss - Var stannar den?

En kloss glider enligt

$$\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) = 0 \quad (1)$$

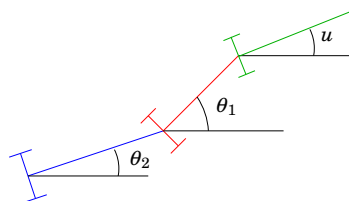
med startläge $y(0) = a$ och hastighet $\dot{y}(0) = b$. Bestäm $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$! Laplacetransformering av (??) ger

$$\begin{aligned} 0 &= s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + c[sY(s) - y(0)] \\ Y(s) &= \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + cy(0)}{s^2 + cs} \end{aligned}$$

Slutvärdesteoremet ger

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow +0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow +0} \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + cy(0)}{s + c} \\ &= \frac{\dot{y}(0) + cy(0)}{c} = \frac{b}{c} + a \end{aligned}$$

Vagnståg



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Hur beror egenvärdena på hastigheten $v(t)$?

Är systemet stabilt?

Kan en stegformad insignal föra vinklarna till noll?

Värmeledande stav

Temperaturen i en värmeledande stav beskrivs av

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

där κ är den termiska diffusiviteten. Med Laplacetransformen

$$Z(s, x) = \int_0^\infty e^{-st} z(t, x) dt$$

kan ekvationen skrivas $sZ = \kappa \frac{d^2 Z}{dx^2}$ med lösningen

$$Z(s, x) = Ae^{-x\sqrt{s/\kappa}} + Be^{x\sqrt{s/\kappa}}.$$

För en oändligt lång stav med ändlig tempertur måste $B = 0$. Temperaturen $y(t)$ i punkten $x = a$ ges då av

$$Y(s) = e^{-a\sqrt{s/\kappa}} U(s)$$

där $U(s)$ är Laplacetransformen av ändpunktstemperaturen $u(t)$.

Kursen framöver

- 27 jan Laplacetransform och Frekvenskurvor.
- 3 feb Argumentvariation, Nyquistteoremet, Bodes relationer
- 10 feb Stabilitet, robusthet, känslighetsfunktionen
INLÄMNING 1: Laplacetransform och Frekvenskurvor.
- 17 feb Koordinatbyte i tillståndsrummet, nollställen, tillståndsåterkoppling, observerare
- 18 feb Styrbarhet och observerbarhet, Kalmans uppdelningssats
- 4 mar Linjära avbildningar och minsta-kvadrat-problem
INLÄMNING 2: Tillståndsbeskrivningar