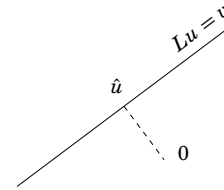


Lektion 6

- Minsta kvadratproblem, typ I
- Exempel: Funktionsapproximering
- Mått på styrbarhet
- Minsta kvadratproblem, typ II
- Mått på observerbarhet

Minsta kvadratproblem I

Givet L och v , minimera $|u|$ under bivillkoret $Lu = v$.



L är "kort och tjock": Fler variabler än ekvationer
Lägg märke till den räta vinkeln!

Linjära operatorer

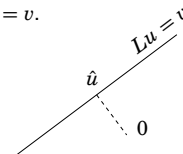
Till en kontinuerlig linjär operator L från ett Hilbertrum till ett annat, kan adjunkten L^* definieras genom att

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle$$

för alla u, v .

Minsta kvadratproblem I

Minimera $|u|$ under bivillkoret $Lu = v$.



Lösning: $\hat{u}$ måste satisfiera $L\hat{u} = v$ och

$$0 = \langle \hat{u}, \hat{u} - u \rangle \text{ för alla } u \text{ med } Lu = v$$

Om LL^* inverterbar så uppfylls villkoren av

$$\hat{u} = L^*(LL^*)^{-1}v$$

Tillämpning: Nå önskat tillstånd med minimal insignal

Mått på styrbarhet

$$Lu = \int_0^T e^{A(t_1-t)} Bu(t) dt$$

$$L^*x(t) = \left[e^{A(t_1-t)} B \right]^T x$$

$$W := LL^* = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)} BB^T e^{A^T(t_1-t)} dt = \int_0^{t_1} e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau$$

Problemet att styra systemet $\dot{x} = Ax + Bu$ från $x(0) = 0$ till $x(t_1) = x_1$ med minimal kostnad $\|u\|^2 = \int_0^{t_1} u^2 dt$ har alltså lösningen

$$\hat{u}(t) = L^*(LL^*)^{-1}x_1 = B^T e^{A^T(t_1-t)} W^{-1}x_1$$

och den minimala kostnaden

$$x_1^T (LL^*)^{-1} x_1 = x_1^T W^{-1} x_1$$

Styrbarhetsgramian

Matrisen

$$W = \int_0^{t_1} e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau$$

kallas Gramian. Kostnaden för att nå tillståndet x_1 är $x_1^T W^{-1} x_1$. Minsta egenvärdet till W är ett mått på styrbarhet, eftersom $1/\lambda_{\min}(W)$ är den styrsignalsnorm som behövs för att på tidsintervallet $[0, t_1]$ kunna nå alla tillstånd med norm ett.

Ofta används styrbarhetsgramian utan att specificera t_1 . Då avses $t_1 = \infty$. I detta fall kan W beräknas ur ekvationen

$$WA^T + AW + BB^T = 0.$$

Exempel: Gramian för vagnståg

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$W = \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix}^T dt$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 - 2e^{-2t_1} & 1 - (2t_1 + 1)e^{-2t_1} \\ 1 - (2t_1 + 1)e^{-2t_1} & 1 - (2t_1^2 + 2t_1 + 1)e^{-2t_1} \end{bmatrix}$$

För $t_1 = \infty$ fås

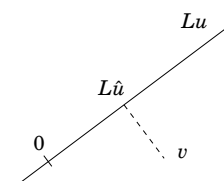
$$W = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

med egenvärden 0.65 och 0.096.

Minsta kvadratproblem II

Givet L och v , minimera $|Lu - v|$ med avseende på u .

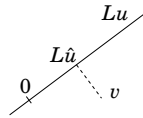
L är "lång och smal": Fler ekvationer än variabler



Lägg märke till den räta vinkeln!

Minsta kvadratproblem II

Minimera $|Lu - v|$ med avseende på u .



Lösning: $\hat{u}$ måste satisfiera

$$0 = \langle Lx, L\hat{u} - v \rangle \text{ for all } x \quad (1)$$

Ekvivalent

$$L^* L \hat{u} = L^* v$$

Observerbarhet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$$

Systemet observerbart om varje x_0 entydigt kan bestämmas ur $y|_{[0,t_1]}$.

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = (Mx_0)(t), \quad y = Mx_0$$

$$M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L}_2^p[0, t_1]$$

Avbildning M , avbildar x_0 på y från vanliga n -dimensionella rummet till funktionsrum

Mått på observerbarhet

Om $y = Mx_0 + e$, dvs om y är störd av mätfel e , kan ekvationen inte lösas exakt. Minsta-kvadrat-lösning:

$$\min_{x_0} \|y - Mx_0\|$$

$$W = M^* M = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

$$\hat{x}_0(t_1) = (M^* M)^{-1} M^* y = W^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T(t_1-t)} C^T y(t) dt$$

Notera att om $y = M\hat{x}_0 = Mx_0 + e$ så uppfyller skattningsfelet $\tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0$

$$\|e\|^2 = \tilde{x}_0^T M^* M \tilde{x}_0$$

Minsta egenvärdet till *observerbarhetsgramianen* $W = M^* M$ ger ett mått på observerbarhet.

Exempel: Funktionsapproximering

Välj u_0, u_1, u_2 för att minimera $\int_0^1 |e^t - u_0 - u_1 t - u_2 t^2|^2 dt$

Lösning:

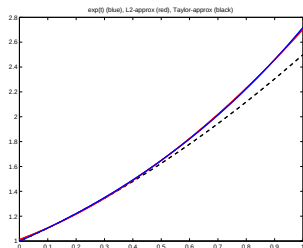
$$u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad Lu = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad v(t) = e^t$$

$$L^* v = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} e^t dt = \begin{bmatrix} e-1 \\ 1 \\ e-2 \end{bmatrix}$$

$$L^* L = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u} = (L^* L)^{-1} L^* v = \begin{bmatrix} 1.013 \\ 0.851 \\ 0.839 \end{bmatrix}$$

Exempel: Funktionsapproximering



Lägg märke till att minsta-kvadrat-approximationen (röd)

$$e^t \approx 1.013 + 0.851t + 0.839t^2$$

är betydligt bättre än Taylorapproximationen (svart)

$$e^t \approx 1 + t + 0.5t^2$$

Lektion 6

- Minsta kvadratproblem, typ I
- Exempel: Funktionsapproximering
- Mått på styrbarhet
- Minsta kvadratproblem, typ II
- Mått på observerbarhet