

Lektion 5

- Styrbarhet – Existens av styrsignal
- Mått på styrbarhet
- Observerbarhet – Entydig skattning
- Mått på observerbarhet

- Kalmans uppdelningssats
- Styrbarhet av skattningsfelet
- Nollställen och tillståndsåterkoppling
- Förkortning vid seriekoppling

[AK-kompendiet, sid. 70-72, 75-77, 86-90, boksidorna 150-162]

Styrbarhet

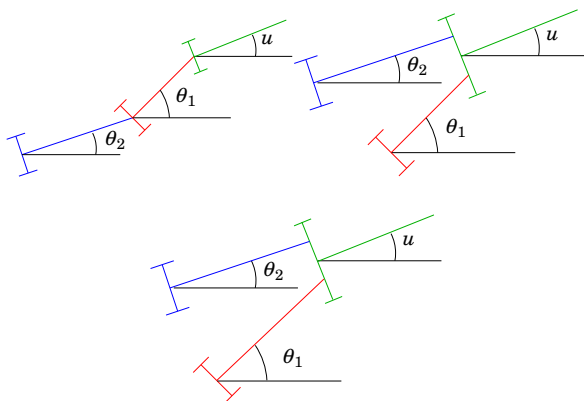
Systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

är styrbart, om det för varje $x_1 \in \mathbb{R}^n$ finns något $u(t), t \in [0, t_1]$, så att $x(t_1) = x_1$ nås från $x(0) = 0$.

De x_1 som på så sätt kan nås utgör det styrbara underrummet, $\{x_1 : (\exists u, x_1 = Lu)\} = \mathcal{R}(L)$.

Vilket vagnståg är styrbart?



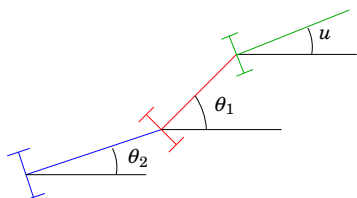
Styrbarhetskriterier

- (i) $W_r = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$, $\text{rank } W_r = n$
- (ii) För varje egenvärde λ med vänstereigenvektor p , $p^T A = \lambda p^T$, gäller $p^T B \neq 0$.
- (iii) För varje $\lambda \in \mathbb{C}$ gäller $\text{rank}[A - \lambda I \ B] = n$

Det tredje kriteriet kallas Popov-Belevitch-Hautus test. (PBH-testet.)

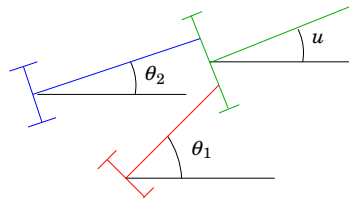
Hur mycket rang tappas i $A - \lambda I$, hur mycket räddas av B ?

Vagnståg 1



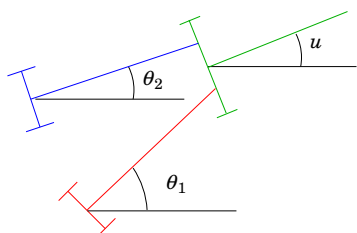
$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Vagnståg 2



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Vagnståg 3



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

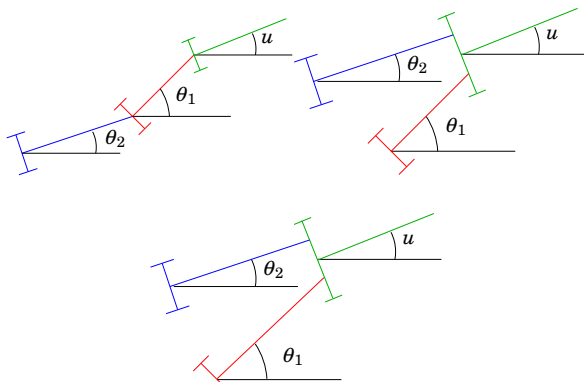
Observerbarhet

Systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$$

kallas observerbart om varje x_0 entydigt kan bestämmas ur $y_{[0, t_1]}$.

Vilket vagntåg är observerbart?



Vilket vagntåg är observerbart om $y = \theta_1$? Om $y = \theta_2$?

Observerbarhetskriterier

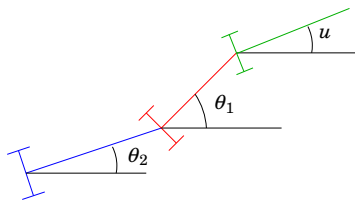
$$(i) W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \text{rank } W_o = n$$

(ii) För varje egenvärde λ med egenvektor v ,
 $Av = v\lambda$, gäller $Cv \neq 0$.

(iii) För varje $\lambda \in \mathbb{C}$ gäller $\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$

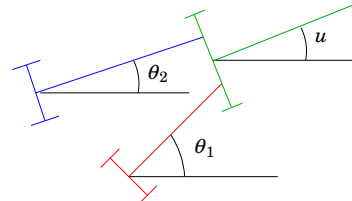
Det tredje kallas Popov-Belevitch-Hautus test. (PBH-testet)
 Hur mycket rang tappas i $A - \lambda I$, hur mycket räddas av C ?

Vagntåg 1



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Vagntåg 2



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Styrbarhet – tillståndstransformation

Sats:

Om $\text{rank}(W_r) = q < n$, så finns transformation V så att

$$AV = V \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ och } B = V \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ styrbar, $q \times q$

Observerbarhet – tillståndstransformation

Sats:

Om $\text{rank}(W_o) = q < n$, så finns transformation V så att

$$AV = V \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ och } CV = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ observerbar, $q \times q$

Kalmans uppdelningssats

Gör tillståndstransformation som delar upp styrbara underrummet (och det kompletterande rummet) i ickeobserverbara underrum och kompletteringar.

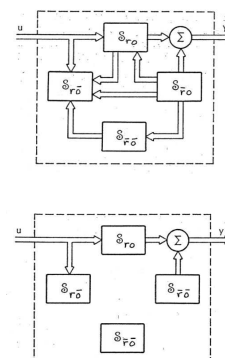
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix} x$$

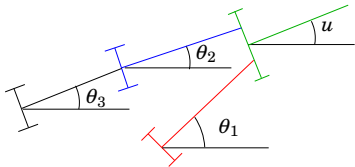
$$G(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1$$

Om inga egenvärden gemensamma mellan två block på diagonalen kan motsvarande icke diagonala block elimineras genom ändrade val av kompletterande baserna.

Kalmans uppdelningssats

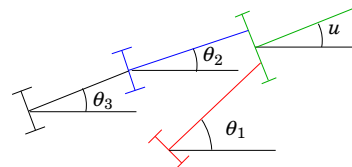


Kalmans uppdelningssats för vagntåg



Vad säger uppdelningssatsen om $y = \theta_2$? Vilket block fattas?

Vagntåg 4



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Vagntåg 4 efter koordinatbyte

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_1 - \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_1 - \theta_2 \end{bmatrix}$$

Styrbarhet av skattningsfelet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BL)x + BL\hat{x} + Bd + Bl_r r \\ \dot{\hat{x}} &= (A - KC)\hat{x} + Bd - Kn \\ y &= Cx + n \\ (sI - A + BL)\tilde{X}(s) - BL\tilde{X}(s) &= BD(s) + Bl_r R(s) \\ (sI - A + KC)\tilde{X}(s) &= BD(s) - KN(s) \end{aligned}$$

Slutna poler: $\det(sI - A + BL)$ och $\det(sI - A + KC)$,
 $G_{yr}(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_r$, förkortning av observerarpoler,
 Skattningsfelsmoderna icke styrbara från r .
 PBH-matrisen tappar rang när s är egenvärde till $A - KC$:

$$\begin{pmatrix} A - BL - sI & BL & Bl_r \\ 0 & A - KC - sI & 0 \end{pmatrix}$$

Nollställen och tillståndsåterkoppling

Välj tillståndsåterkoppling L som ger pol i λ .

Om moden $x_0 e^{\lambda t}$ nu blir icke observerbar,

$$\begin{pmatrix} A - BL - \lambda I \\ C \end{pmatrix} x_0 = 0$$

så var λ ett nollställe:

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = 0$$

Svarar mot förkortning av $s - \lambda$ i

$$G(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_r$$

Förkortning vid seriekoppling

Nollställe λ i $G_1(s)$ förkortas mot pol i $G_2(s)$

$$\begin{aligned} (A_2 - \lambda I)x_2 &= 0 \\ u_1 &= C_2 x_2 \\ \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 - \lambda I \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

ger att moden är icke observerbar i $G_1(s)G_2(s)$.
 På motsvarande sätt icke styrbar i $G_2(s)G_1(s)$.

Sammanfattning

- Styrbarhet – Existens av styrsignal – Värderum
- Styrbarhetskriterier och mått på styrbarhet
- Observerbarhet – Entydig skattning – Nollrum
- Observerbarhetskriterier och mått på observerbarhet
- Kalmans uppdelningssats
- Tolkning som förkortning