Förra veckan

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- Bodes relationer
- Linjärisering längs trajektoria
- Exempel: Sticksåg

Lektion 4

Utnyttja mer linjär algebra för att förstå och räkna med tillståndsbeskrivningar.

- Tillståndsbeskrivningen (139-150)
- $G(s)$, nämnare och täljare, poler och nollställen
- Koordinatbyte, diagonalform, styrbar form
- Tillståndsåterkoppling
- Observerare
- Återkoppling från skattade tillstånd
- AK sid 18-19, 67-90, 131-122, lab 3

Tillståndsbeskrivning

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s)\\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[sI - A]X(s) &= x_0 + BU(s),\\ Y(s) &= \underbrace{\left(C[sI - A]^{-1}B + D\right)}_{G(s)} U(s) + \left(C[sI - A]^{-1}\right)x_0\end{aligned}$$

$$y(t) = (g * u)(t) + Ce^{At}x_0$$

Nämnarpolynom: $\det[sI - A] = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$

Poler och Nollställen

Pol λ, egenvärde till A, egenvektor v

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \qquad Av = v\lambda,\ e^{At}v = ve^{\lambda t}$$

$$u = 0, x(0) = v \Rightarrow\ x(t) = e^{At}x(0) = ve^{\lambda t}$$

Nollställe z: Finns x_0, så att $x(0) = x_0$ och $u(t) = u_0 e^{zt}$ ger $x(t) = x_0 e^{zt}$, och $y(t) = y_0 e^{zt} = 0$.

$$\begin{aligned}zx_0e^{zt} &= Ax_0e^{zt} + Bu_0e^{zt} \Leftrightarrow [A - zI]x_0 + Bu_0 = 0\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) = (Cx_0 + Du_0)e^{zt} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A - zI & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ u_0\end{pmatrix} = 0$$

Nollrum $\neq \{0\}$ för z nollställe
`eig([A,B;C,D],diag([1,1,0]))` (för $n = 2$)

Diagonalisering genom koordinatbyte

$$A\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\lambda_1 & \ldots & v_n\lambda_n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n\end{pmatrix}}_{T^{-1}}\Lambda$$

$$\begin{aligned}TAT^{-1} &= \Lambda\\ Te^{At}T^{-1} &= e^{\Lambda t}\end{aligned}$$

Om $\dot{x} = A$ så ger koordinatbytet $z = Tx$ att $\dot{z} = \Lambda z$.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB$$

Koordinatbyte forts

Diagonalform (Parallellkoppling)

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n\end{pmatrix} z + Du$$

$$G(s) = \frac{\beta_1\gamma_1}{s - \lambda_1} + \ldots + \frac{\beta_n\gamma_n}{s - \lambda_n} + D$$

Partialbråksuppdelning

Styrbar form

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & a_{n-1} & -a_n\\ 1 & 0 & & 0 & 0\\ 0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} u$$

$$sX_{k+1}(s) = X_k(s) \Rightarrow X_k(s) = s^{n-k}X_n(s), \quad k = 1, \ldots, n-1$$

$$\begin{pmatrix} s + a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n\end{pmatrix} X(s) = U(s)$$

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n)X_n(s) = U(s)$$

$$y = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n\end{pmatrix} x + Du$$

$$\begin{aligned}Y(s) &= b_1X_1(s) + b_2X_2(s) + \cdots + b_nX_n(s) + DU(s)\\ &= (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_n)X_n(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Tillståndsåterkoppling

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\\ y = Cx\end{cases}$$

$$u = -Lx + l_r r$$

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt} = (A - BL)x + Bl_r r\\ y = Cx\end{cases}$$

Tillståndsåterkoppling på styrbar form

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 - \bar{l}_1 & -a_2 - \bar{l}_2 & \dots & -a_{n-1} - \bar{l}_{n-1} & -a_n - \bar{l}_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} l_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} x$$

$$p_i = a_i + \bar{l}_i$$

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_n}{s^n + p_1 s^{n-1} + \ldots + p_n} l_r$$

Frihet att välja nämnare med L. Oförändrad täljare!

Nollställen och tillståndsåterkoppling

$$\begin{pmatrix} A - BL - zI & Bl_r \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - zI & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -L & Il_r \end{pmatrix}$$

Tappar rang för samma z. Samma nollställen!

Observerare

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + n \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\ \tilde{x} &= x - \hat{x} \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} &= (A - KC)\tilde{x} - Kn \end{aligned}$$

Välj K för lagom snabbhet – brusinverkan

”Dualitet”

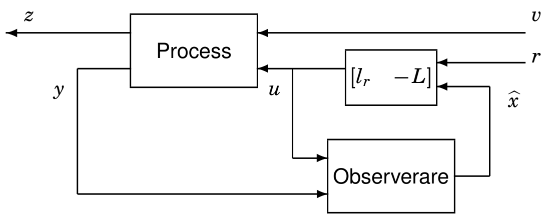
$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow A^T \\ B &\leftrightarrow C^T \\ L &\leftrightarrow K^T \end{aligned}$$

Observerbar form gör $A - KC$ speciellt enkel

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z$$

Återkoppling från skattade tillstånd



Process: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + v(t)] \\ y(t) = Cx(t) + n(t) \end{cases}$

Observerare: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ u(t) = -L\hat{x}(t) + l_r r(t) \end{cases}$

Slutna systemets egenskaper

Eliminate u and y:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) - BL\hat{x}(t) + Bv(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) - BL\hat{x}(t) + K[Cx(t) - C\hat{x}(t)] + Kn(t) \end{aligned}$$

Introduce $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bv(t) \\ -Kn(t) \end{bmatrix}$$

Två slags poler för slutna systemet:

Processpoler:	$0 = \det(sI - A + BL)$
Observer poles:	$0 = \det(sI - A + KC)$

Exempel – Dubbelintegrator

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Välj tex

$$\det(sI - A + BL) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ l_1 & s + l_2 \end{pmatrix} = s^2 + s + 1$$

dvs $l_1 = 1, l_2 = 1$ och

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix} = s^2 + 2s + 4$$

dvs $k_1 = 2, k_2 = 4$.

Exempel – Dubbelintegrator – forts

Processen $P(s) = \frac{1}{s^2}$ med återkopplingen

$$C(s) = L(sI - A + BL + KC)^{-1}K$$

ger slutna systemet överföringsfunktioner

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+PC} & \frac{C}{1+PC} \\ \frac{P}{1+PC} & \frac{PC}{1+PC} \end{bmatrix}$$

med Bode’s amplituddiagram