

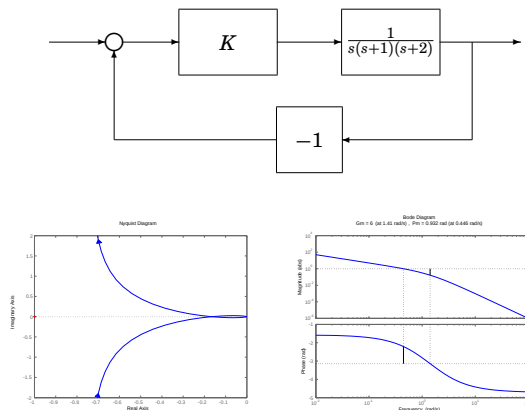
Förra veckan

- ▶ Argumentvariationsprincipen
- ▶ Nyquistkriteriet
- ▶ Exempel

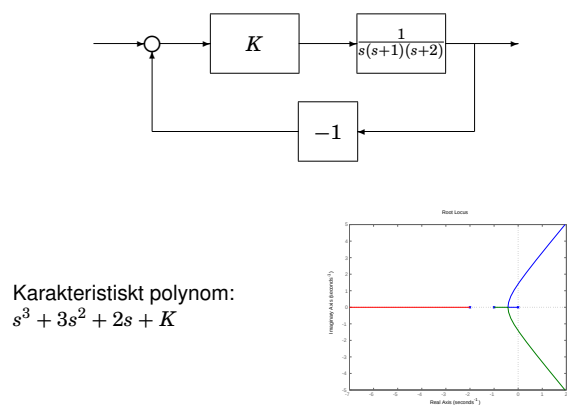
Dagens föreläsning

- ▶ Exempel: Proportionell återkoppling
- ▶ Marginaler och känslighet
- ▶ Bodes relationer
- ▶ Linjärisering längs trajektoria
- ▶ Exempel: Sticksåg

Exempel: Vilka värden på K ger stabilitet?

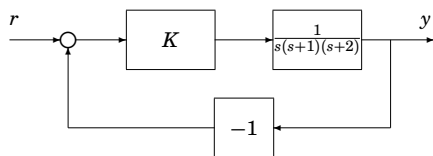


Exempel: Vilka värden på K ger stabilitet?



Karakteristiskt polynom:
 $s^3 + 3s^2 + 2s + K$

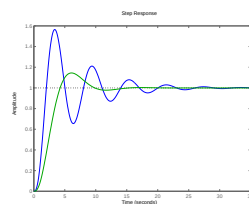
Stegsvar i referensföljningen



Stegsvar från referens r till utsignal y :

$$\left(1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right)^{-1}$$

för $K = 1$ och $K = 3$:



Dagens föreläsning

- ▶ Exempel: Proportionell återkoppling
- ▶ Marginaler och känslighet
- ▶ Bodes relationer
- ▶ Linjärisering längs trajektoria
- ▶ Exempel: Sticksåg

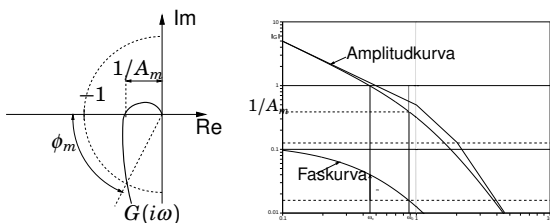
Amplitudmarginal och fasmarginal

Amplitudmarginal, A_m :

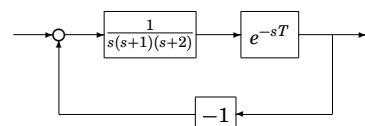
$$\arg G(i\omega_0) = -180^\circ, \quad |G(i\omega_0)| = \frac{1}{A_m}$$

Fasmarginal ϕ_m :

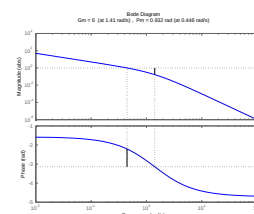
$$|G(i\omega_c)| = 1, \quad \arg G(i\omega_c) = \phi_m - 180^\circ$$



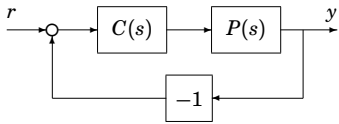
Mini-problem



Hur stor tidsfördröjningen T tillåts innan systemet blir instabilt?



Hur känsligt är slutna systemet T för ändringar i P ?



$$Y(s) = \underbrace{\frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}}_{T(s)} R(s) \quad \frac{d(\log T)}{d(\log P)} = \frac{dT/T}{dP/P} = \frac{1}{S(s)}$$

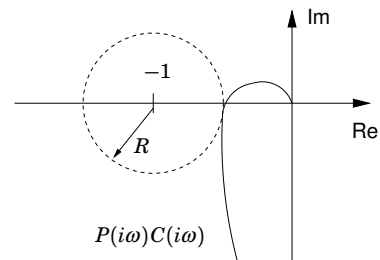
Känslighetsfunktionen $S(i\omega)$ måste vara liten för små ω . Detta åstadkoms med integralverkan.

Komplementära känslighetsfunktionen $T(i\omega)$ måste vara liten för stora ω , för att hantera mätbrus och tidsfördröjningar.

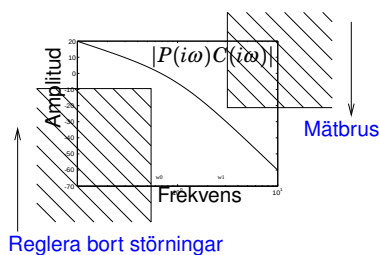
Illustration i Nyquistdiagrammet

Känslighetsfunktionen mäter Nyquistkurvens avstånd till -1 :

$$R^{-1} = \sup_{\omega} \left| \frac{1}{1 + P(i\omega)C(i\omega)} \right|$$



En reglerteknisk krets ska typiskt ha hög förstärkning $|P(i\omega)C(i\omega)|$ vid låga frekvenser för att ta bort störningar och följa referenssignalen, men låg förstärkning vid höga frekvenser för att undvika stabilitetsproblem och effekterna av mätbrus.



Hur snabbt kan man gå från hög till låg förstärkning?

Dagens föreläsning

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- **Bodes relationer**
- Linjärisering längs trajektoria
- Exempel: Sticksåg

Bodes relationer — Approximativ version

Om $G(s)$ är stabil och saknar nollställen i högra halvplanet så gäller

$$\arg G(i\omega_0) \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} \bigg|_{\omega=\omega_0}$$

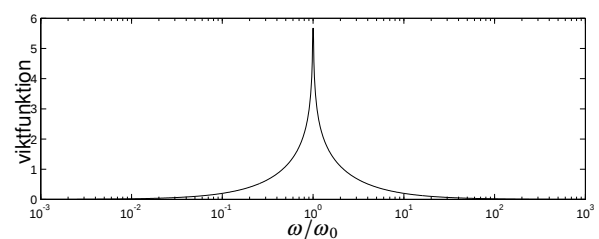
Med nollställen i högra halvplanet blir argumentet ännu mindre.

Slutsats: Lutningen på amplitudkurvan måste vara klart mindre än 2 nära skärfrekvensen (där amplituden är ett). Annars kommer Nyquistkurvan att omcirkla -1 .

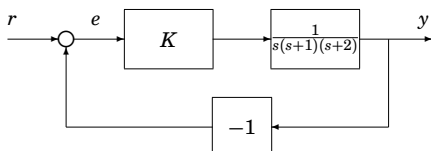
Bode's relation — Exakt version

Om G är stabil och utan nollställen i högra halvplanet så gäller

$$\arg G(i\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} \underbrace{\log \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|}_{\text{viktfunction}} d \log \omega$$



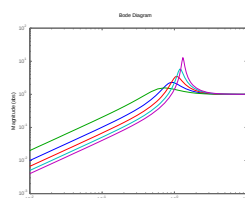
Högre förstärkning, mer svängningar. Varför?



Amplitudkurva från referens r till fel e :

$$\left(1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right)^{-1}$$

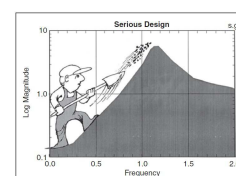
för $K = 1, 2, 3, 4, 5$:



Bodes Integralformel ("Vattensängseffekten")

Om kretsförstärkningen $L = PC$ har relativt gradtal ≥ 2 och instabila poler $p_1, \dots, p_M$, gäller följande *konserveringslag* för känslighetsfunktionen $S = \frac{1}{1+L}$:

$$\int_0^{+\infty} \log |S(i\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^M \text{Re}(p_i)$$



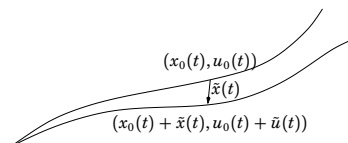
Dagens föreläsning

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- Bodes relationer
- Linjärisering längs trajektoria
- Exempel: Sticksåg

Linjärisering längs trajektoria

Låt $(x_0(t), u_0(t))$ vara en lösning till $\dot{x} = f(x, u)$ och betrakta en närliggande lösning $(x(t), u(t)) = (x_0(t) + \tilde{x}(t), u_0(t) + \tilde{u}(t))$:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x_0(t) + \tilde{x}(t), u_0(t) + \tilde{u}(t)) \\ &= f(x_0(t), u_0(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), u_0(t))\tilde{x}(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0(t), u_0(t))\tilde{u}(t) + O(\|\tilde{x}, \tilde{u}\|^2)\end{aligned}$$



Linjärisering, fortsättning

Alltså gäller för små $(\tilde{x}, \tilde{u})$, approximativt

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t)$$

där (om $\dim x = 2$, $\dim u = 1$)

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), u_0(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))} \\ B(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x_0(t), u_0(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))}\end{aligned}$$

Notera att $A(t)$ och $B(t)$ är **tidsberoende**! Däremot, om vi linjäriserar i en jämviktpunkt $(x_0(t), u_0(t)) \equiv (x_0, u_0)$ så är de tidsberoende.

Linjärisering, fortsättning

Linjärisering av utsignalekvationen

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

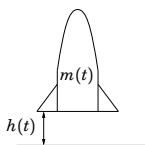
längs den nominella utsignalen $y_0(t) = h(x_0(t), u_0(t))$ ges av

$$\tilde{y}(t) = C(t)\tilde{x}(t) + D(t)\tilde{u}(t)$$

där $\tilde{y}(t) = y(t) - y_0(t)$ och (om $\dim y = \dim x = 2$, $\dim u = 1$)

$$\begin{aligned}C(t) &= \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))} \\ D(t) &= \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))}\end{aligned}$$

Example: Raket



$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -g + \frac{v_e u(t)}{m(t)} \\ \dot{m}(t) &= -u(t)\end{aligned}$$

$$\text{Let } u_0(t) \equiv u_0 > 0; \quad x_0(t) = \begin{bmatrix} h_0(t) \\ v_0(t) \\ m_0(t) \end{bmatrix}; \quad m_0(t) = m_0 - u_0 t.$$

$$\text{Linjärisering: } \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-v_e u_0}{m_0(t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_e}{m_0(t)} \\ -1 \end{bmatrix} \tilde{u}(t)$$

Linjära tidsberoende system — Varning!

Eigenvärdena för $A(t)$ kan **inte** användas för att avgöra stabilitet:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \cos^2 t & 1 - \alpha \sin t \cos t \\ -1 - \alpha \sin t \cos t & -1 + \alpha \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

Eigenvärdena är konstanta

$$\lambda(t) = \lambda = \frac{\alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

med negativ realdel för $0 < \alpha < 2$. Dock, är lösningen

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{(\alpha-1)t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{(\alpha-1)t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} x(0),$$

obegränsad för $\alpha > 1$.

Dagens föreläsning

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- Bodes relationer
- Linjärisering längs trajektoria
- Exempel: Sticksåg

Exempel — Sticksågen

Kan vi stabilisera en inverterad pendel genom bara vertikala svängningar?



Sticksågen

Dynamik för inverterad pendel med sinusformad sågrörelse:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ell^{-1} (g + a\omega^2 \sin \omega t) \sin x_1 \end{cases}$$

Periodisk bana med periodtid $T = 2\pi/\omega$.

Linjärisering längs banan ger $\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t)$ där

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\omega^2 \sin \omega t \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabilitet för pendel på sticksågen

Ingen analytisk lösning, men vi kan numeriskt bestämma en modell av formen

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t+T) \\ \tilde{x}_2(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(T) \\ \tilde{x}_2(T) \end{bmatrix}$$

För $a = 1\text{cm}$, $\ell = 17\text{cm}$, $\omega = 180$ fås

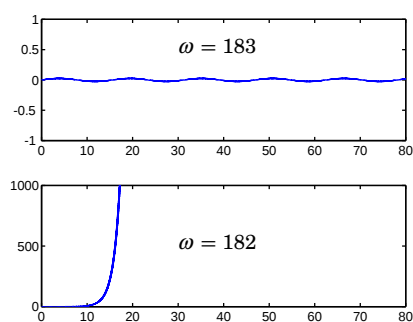
$$\Phi = \begin{pmatrix} 1.37 & 0.035 \\ -3.86 & 0.630 \end{pmatrix}$$

med egenvärden $(1.047, 0.955)$. Instabilt!

Φ är stabil för $\omega > 183$

Sticksåg —Simulering

Simulering ger god överensstämmelse:



Dagens föreläsning

- ▶ Exempel: Proportionell återkoppling
- ▶ Marginaler och känslighet
- ▶ Linjärisering längs trajektoria
- ▶ Exempel: Sticksåg