

Reglerteori — Övning 2 med lösning

6 februari, 2014

1. a.) Betrakta ett minimum-fas linjärt system $G(s)$. Visa att systemets fas-marginal är $PM \approx 90^\circ$, då amplitudkurvans lutning är $n = -1$ en dekad under och över skärfrekvensen. Använd Bodes relationer. Diskutera skärskilt betydelsen av funktionen $\frac{2}{\pi^2} \log \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|$.
- b.) Visa hur man kan få beroendet mellan belopp och argumentkurvan med hjälp av Bodes relationer, då systemet är icke-minimum-fas.

Solution:

- a.) Från Bodes relationer får man:

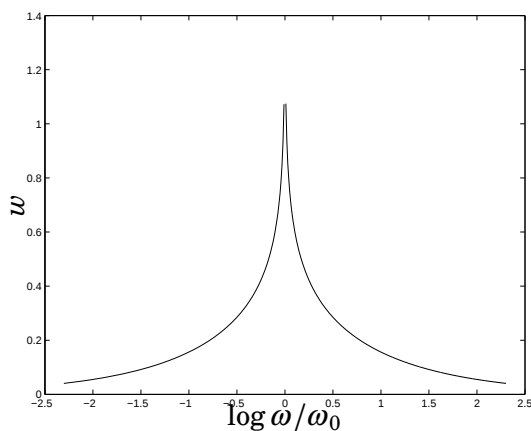
$$\arg G(i\omega_0) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} d \log \omega \approx n \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Fasmarginalen blir:

$$\varphi_m = \pi + \arg G(i\omega_0) \approx \frac{\pi}{2}$$

Funktionen $w \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{2}{\pi^2} \log \left| \frac{\omega + \omega_0}{\omega - \omega_0} \right|$ är en viktfunktion som kan approximeras med en impulsfunktion. Figur 1 visar funktionen w för $\omega_0 = 1$. Man kan också bevisa att $\int_{-\infty}^{\infty} w d \log \omega = 1$.

- b.) En överföringsfunktion kan skrivas som: $G(s) = G_1(s)G_2(s)G_{mf}(s)$ där $G_1(s) = \prod_i \frac{-s+z_i}{s+\bar{z}_i}$, $G_2(s) = \prod_i \frac{s+\bar{p}_i}{-s+p_i}$, med $\operatorname{Re} z_i > 0$, $\operatorname{Re} p_i > 0$,



Figur 1 Viktfunktionen i Bodes relation.

och $G_{mf}(s)$ är en minimum-fas överföringsfunktion, dvs alla poler och nollställen i vänster halvplan. Vi har $|G(i\omega)| = |G_{mf}(i\omega)|$ och fasen blir $\arg G(i\omega_0) = \arg G_1(i\omega_0) + \arg G_2(i\omega_0) + \arg G_{mf}(i\omega_0)$, där

$$\arg G_{mf}(i\omega_0) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{d \log |G(i\omega)|}{d \log \omega} d \log \omega$$

$$\arg G_1(i\omega_0) = \sum_i \arg \left(\frac{-i\omega_0 + z_i}{i\omega_0 + \bar{z}_i} \right), \quad \arg G_2(i\omega_0) = \sum_i \arg \left(\frac{i\omega_0 + \bar{p}_i}{-i\omega_0 + p_i} \right)$$

där summan har ett negativt bidrag, dvs. icke-minimum-fas nollställe ger extra fasförlust.

2. Betrakta processen $G(s) = 1/s^2$ och regulatorn $G_r(s) = K(sT + 1)$.

- a.) Designa regulatorn $G_r(s)$, som gör att $|G(i\omega_c)G_r(i\omega_c)| = 1$ vid $\omega_c = 0.2$ rad/sek och kretsöverföringsfunktionen har en amplitudkurva med lutning $n \approx -1$ inom en dekad runt skärfrekvensen ω_c .
- b.) Vad blir systemets fasmarginal?

Solution:

- a.) Vid skärfrekvensen $\omega_c = 0.2$ gäller det att:

$$K \left| \frac{1}{(i\omega_c)^2} (i\omega_c T + 1) \right| = 1$$

En dekad kring skärfrekvensen betyder intervallet $[\omega_c/\sqrt{10}, \omega_c\sqrt{10}]$. Vi skall välja brytpunkten $1/T$ lagom lägre än undre gränsen i intervallet, så att vi har lutning -1 i hela intervallet. Vi har $0.2/\sqrt{10} = 0.063$ så $1/T = 0.05$ är rimligt. Då får man att $K = 0.04/\sqrt{17}$.

- b.) Systemets fasmarginal blir

$$\varphi_m = \pi + \arg G(i\omega_c)G_r(i\omega_c) = \arctan \omega_c T \approx 76^\circ$$

3. Betrakta processen

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)^3}.$$

- a.) Systemet återkopplas med en förstärkning -1 . För vilka $K > 0$ är slutna systemet stabilt? Använd argumentvariationsprincipen. Kontrollera också med hjälp av villkoret för system av tredje ordning.
- b.) Betrakta processen

$$P(s) = \frac{2}{s+2}$$

samt PI-regulatorn

$$C(s) = K \frac{s+1}{s}.$$

Använd MATLAB för att plotta Nyquistkurvan för kretsöverföringsfunktionen $L(s) = P(s)C(s)$, för olika värden på förstärkningen K . Plotta och studera speciellt bilden av den lilla halvcirkeln.

Solution:

a.) Överföringsfunktionen $G(s)$ har följande egenskaper:

$$G(Re^{i\varphi}) = \frac{K}{(Re^{i\varphi} + 1)^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$
$$G(\bar{s}) = \overline{G(s)}$$

Det vill säga:

- * stora halvcirkeln som omsluter högra halvplanet avbildas i origo genom $G(s)$.
- * kurvan där s varierar ger genom avbildningen $G(s)$ en bild som är symmetrisk med avseende på reella axeln

Halva imaginära axeln bildas som:

$$G(i\omega) = K \frac{(1 - 3\omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2} + iK \frac{-(3\omega - \omega^3)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}$$

Enligt argumentvariationsprincipen, är slutna systemet stabilt om $N = 0$ i ekvationen:

$$N_w = N - P$$

där N_w är antalet varv den utökade Nyquistkurvan tar runt punkten -1 . I detta fall är $P = 0$ eftersom det öppna systemet är stabilt. Detta medför att $G(i\omega)$ får ej omsluta -1 . Skärningspunkterna mellan reella axeln och $G(i\omega)$ är vid $\omega = 0, \sqrt{3}$. Som ger villkoret $K < 8$.

Det slutna systemet $G_{cl}(s)$ ges av

$$G_{cl}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K}$$

Från villkoret för stabilitet för ett tredje ordningens system får man:

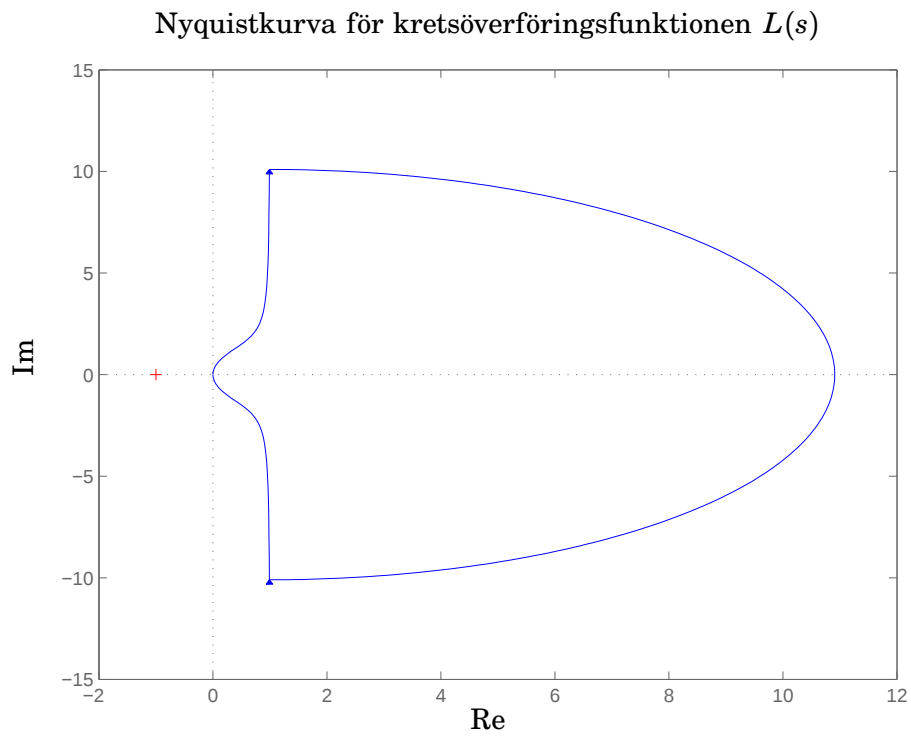
$$a_1 a_2 > a_3$$

Identifiering av koefficienter ger $a_1 = a_2 = 3$ och $a_3 = 1 + K$. Således fås villkoret:

$$9 > 1 + K \iff K < 8.$$

b.) Exempel på MATLAB-kod för att plotta Nyquistkurvan:

```
K = 2; % Testa också med andra värden
      % på förstärkningen K
b=K*[2 2];a=[1 2 0];
L=tf(b,a);
fi=[-1:0.01:1]*pi/2;
circ=exp(i*fi);
wmin=2e-1;
wmax=0.5e3;
bs=polyval(b,wmin*circ);
as=polyval(a,wmin*circ);
gcirc=bs./as;
plot(real(gcirc),imag(gcirc))
hold on
nyquist(L,{wmin,wmax})
title('Nyquistkurva för kretsöverföringsfunktionen L(s)')
```



Figur 2 Nyquistkurva för $L(s)$ i uppg. 3b för $K = 2$. Notera speciellt bilden av lilla halvcirkeln, vilken går mot oändligheten då radien på den lilla halvcirkeln går mot noll.

Figuren som genereras av skriptet ovan finns i Figur 2.