

Lektion 5

- Styrbarhet – Existens av styrsignal
- Mått på styrbarhet
- Observerbarhet – Entydig skattning
- Mått på observerbarhet

- Kalmans uppdelningssats
- Styrbarhet av skattningsfelet
- Nollställen och tillståndsåterkoppling
- Förkortning vid seriekoppling

[AK-kompendiet, sid. 70-72, 75-77, 86-90, boksidorna 150-162]

Tillståndsbeskrivning

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau = Lu_{[0,t_1]}$$

$$L : \mathbf{L}_2^n[0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

Avbildning L
från funktionsrum till vanliga n -dimensionella rummet,
från u till x_1

Värderum – Kolonnrum – Image – Range space
 $\mathcal{R}(L)$ – Det som spänns upp av L
Jfr matris avlång horisontellt – många fler kolumner än rader

Styrbarhet

Systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

är styrbart, om det för varje $x_1 \in \mathbf{R}^n$ finns något $u(t), t \in [0, t_1]$, så att $x(t_1) = x_1$ nås från $x(0) = 0$.

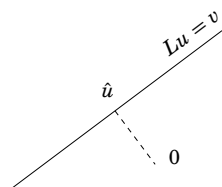
De x_1 som på så sätt kan nås utgör det styrbara underrummet, $\{x_1 : (\exists u, x_1 = Lu)\} = \mathcal{R}(L)$.

Styrbarhetskriterier

- (i) Styrbarhet, $\mathcal{R}(L) = \mathbf{R}^n$
 - (ii) $W_r = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$, $\text{rank } W_r = n$
 - (iii) För varje egenvärde λ med vänstereigenvektor p , $p^T A = \lambda p^T$, gäller $p^T B \neq 0$.
 - (iv) För varje $\lambda \in \mathbf{C}$ gäller $\text{rank}[A - \lambda I \quad B] = n$
- Popov-Belevitch-Hautus PBH-test
 - Hur mycket rang tappas i $A - \lambda I$, hur mycket räddas av B ?

Minsta kvadratproblem I

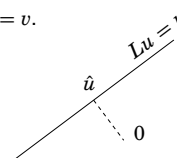
Givet L och v , minimera $|u|$ under bivillkoret $Lu = v$.



L är "kort och tjock": Fler variabler än ekvationer
Lägg märke till den rätta vinkeln!

Minsta kvadratproblem I

Minimera $|u|$ under bivillkoret $Lu = v$.



Lösning: $\hat{u}$ måste satisfiera $L\hat{u} = v$ och

$$0 = \langle \hat{u}, \hat{u} - u \rangle \text{ för alla } u \text{ med } Lu = v \quad (\text{OP2})$$

Om LL^* inverterbar så uppfylls villkoren av

$$\hat{u} = L^*(LL^*)^{-1}v$$

Tillämpning: Nå önskat tillstånd med minimal insignal

Mått på styrbarhet

Stor frihet att välja u . Välj det "bästa":

$$\min_{u: x_1 = Lu} \|u\|^2 = x_1^T W^{-1} x_1 \quad (\text{för } \hat{u} = L^* W^{-1} x_1)$$

$$W = LL^* = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

$$\hat{u}(t) = L^* W^{-1} x_1 = B^T e^{A^T(t_1-t)} W^{-1} x_1$$

"Dyraste" x_1 :

$$\max_{\|x_1\|=1} x_1^T W^{-1} x_1 = 1/\lambda_{\min}(W)$$

Minsta egenvärdet till "Gramianen" $W = LL^*$ är ett mått på styrbarhet, som anger vad det minst kostar att nå det svåraste tillståndet x_1

Observerbarhet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}$$

Systemet observerbart om varje x_0
entydigt kan bestämmas ur $y_{[0,t_1]}$.

$$y(t) = C e^{At} x_0 = (M x_0)(t), \quad y = M x_0$$

$$M : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{L}_2^p[0, t_1]$$

Avbildning M , avbildar x_0 på y
från vanliga n -dimensionella rummet till funktionsrum

Nollrum, $\mathcal{N}(M)$ – De x_0 som avbildas på $y = 0$

Beskriver icke entydighet

Jfr matris avlång vertikalt – många fler rader än kolumner

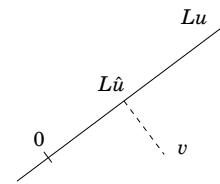
Oftast $\mathcal{N}(M) = \{0\}$

Observerbarhetskriterier

- (i) Observerbarhet, $\mathcal{N}(M) = \{0\}$
- (ii) $W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$, $\text{rank } W_o = n$
- (iii) För varje egenvärde λ med egenvektor v ,
 $Av = v\lambda$, gäller $Cv \neq 0$.
- (iv) För varje $\lambda \in \mathbb{C}$ gäller $\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$
- Popov-Belevitch-Hautus PBH-test
 - Diagonalform
 - Hur mycket rang tappas i $A - \lambda I$, hur mycket räddas av C ?

Minsta kvadratproblem II

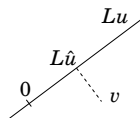
Givet L och v , minimera $|Lu - v|$ med avseende på u .
 L är "lång och smal": Fler ekvationer än variabler



Lägg märke till den rätta vinkeln!

Minsta kvadratproblem II

Minimera $|Lu - v|$ med avseende på u .



Lösning: $\hat{u}$ måste satisfiera

$$0 = \langle Lx, L\hat{u} - v \rangle \text{ for all } x \quad (\text{OP1})$$

Ekvivalent

$$L^* L \hat{u} = L^* v$$

Mått på observerbarhet

Om $y = Mx_0 + e$, dvs y störd av vitt brus e ,
kan ekvationen inte lösas exakt. Minsta-kvadrat-lösning:

$$\min_{x_0} \|y - Mx_0\|$$

$$W = M^* M = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

$$\hat{x}_0(t_1) = (M^* M)^{-1} M^* y = W^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T(t_1-t)} C^T y(t) dt$$

Skattningsfelets varians: $E\hat{x}_0\hat{x}_0^T = W^{-1}$
Varians av $a^T x_0$ i "svårast" riktningen a :

$$\max_{|a|=1} a^T W^{-1} a = 1/\lambda_{\min}(W)$$

Minsta egenvärdet till $M^* M$ ger ett mått på observerbarhet.

Styrbarhet – tillståndstransformation

Sats:

Om $\text{rank}(W_r) = q < n$, så finns transformation V så att

$$AV = V \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ och } B = V \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ styrbar, $q \times q$

Om $\tilde{A}_{11}$ och $\tilde{A}_{22}$ inte har några egenvärden gemensamt så kan V väljas så att $\tilde{A}_{12} = 0$.

$$W_r = V \tilde{W}_r = V \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11} \tilde{B}_1 & \cdots & \tilde{A}_{11}^{n-1} \tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\tilde{W}_r) = q$$

Observerbarhet – tillståndstransformation

Om $\text{rank}(W_o) = q < n$, så finns transformation V så att

$$AV = V \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ och } CV = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ observerbar, $q \times q$

Om $\tilde{A}_{11}$ och $\tilde{A}_{22}$ inte har några egenvärden gemensamt så kan V väljas så att $\tilde{A}_{21} = 0$.

$$W_o = \tilde{W}_o V = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \\ C \tilde{A}_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C \tilde{A}_{11}^{n-1} & 0 \end{bmatrix} V, \quad \text{rank}(\tilde{W}_o) = q$$

Kalmans uppdelningssats

Gör tillståndstransformation som delar upp styrbara underrummet (och det kompletterande rummet) i ickeobserverbara underrum och kompletteringar.

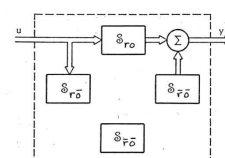
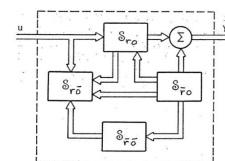
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$G(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1} B_1$$

Om inga egenvärden gemensamma mellan två block på diagonalen kan motsvarande icke diagonala block elimineras genom ändrade val av kompletterande baserna.

Kalmans uppdelningssats



Styrbarhet av skattningsfelet

$$\dot{x} = (A - BL)x + BL\tilde{x} + Bd + Bl_r r$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + Bd - Kn$$

$$y = Cx + n$$

$$(sI - A + BL)\tilde{X}(s) - BL\tilde{X}(s) = BD(s) + Bl_r R(s)$$

$$(sI - A + KC)\tilde{X}(s) = BD(s) - KN(s)$$

Slutna poler: $\det(sI - A + BL)$ och $\det(sI - A + KC)$,

$G_{yr}(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_r$, förkortning av observerarpoler,

Skattningsfelsmoderna icke styrbara från r .

PBH-matrisen tappar rang när s är egenvärde till $A - KC$:

$$\begin{pmatrix} A - BL - sI & BL & Bl_r \\ 0 & A - KC - sI & 0 \end{pmatrix}$$

Nollställen och tillståndsåterkoppling

Välj tillståndsåterkoppling L som ger pol i λ .

Om moden $x_0 e^{\lambda t}$ nu blir icke observerbar,

$$\begin{pmatrix} A - BL - \lambda I \\ C \end{pmatrix} x_0 = 0$$

så var λ ett nollställe:

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = 0$$

Svarar mot förkortning av $s - \lambda$ i

$$G(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bl_r$$

Förkortning vid seriekoppling

Nollställe λ i $G_1(s)$ förkortas mot pol i $G_2(s)$

$$(A_2 - \lambda I)x_2 = 0$$

$$u_1 = C_2 x_2$$

$$\begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & B_1 \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 - \lambda I \\ C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

ger att moden är icke observerbar i $G_1(s)G_2(s)$.

På motsvarande sätt icke styrbar i $G_2(s)G_1(s)$.

Sammanfattning

- Styrbarhet – Existens av styrsignal – Värderum
- Styrbarhetskriterier och mått på styrbarhet
- Observerbarhet – Entydig skattning – Nollrum
- Observerbarhetskriterier och mått på observerbarhet
- Kalmans uppdelningssats
- Tolkning som förkortning