Förra veckan

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- Linjärisering längs trajektoria
- Exempel: Sticksåg

Lektion 4

Utnyttja mer linjär algebra för att förstå och räkna med tillståndsbeskrivningar.

- Tillståndsbeskrivningen (139-150)
- $G(s)$, nämnare och täljare, poler och nollställen
- Koordinatbyte, diagonalform, styrbar form
- Tillståndsåterkoppling
- Observerare
- Återkoppling från skattade tillstånd
- AK sid 18-19, 67-90, 131-122, lab 3

Tillståndsbeskrivning

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$[sI - A]X(s) = x_0 + BU(s),$$
$$Y(s) = \underbrace{(C[sI-A]^{-1}B + D)}_{G(s)} U(s) + (C[sI-A]^{-1})x_0$$

Nämnarpolynom

$$\det[sI - A] = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$$

Cayley-Hamiltons sats:

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I = 0$$

Poler och Nollställen

Pol λ, egenvärde till A, egenvektor v

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \qquad Av = v\lambda,\ e^{At}v = ve^{\lambda t}$$
$$u = 0, x(0) = v \Rightarrow\ x(t) = e^{At}x(0) = ve^{\lambda t}$$

Nollställe z: Finns x_0, så att $x(0) = x_0$ och $u(t) = u_0 e^{zt}$ ger $x(t) = x_0 e^{zt}$, och $y(t) = y_0 e^{zt} = 0$.

$$z x_0 e^{zt} = Ax_0 e^{zt} + Bu_0 e^{zt} \Leftrightarrow [A - zI]x_0 + Bu_0 = 0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = (Cx_0 + Du_0)e^{zt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} A - zI & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} = 0$$

Nollrum $\neq \{0\}$ för z nollställe
`eig([A,B;C,D],diag([1,1,0]))` (för $n = 2$)

Diagonalisering genom koordinatbyte

$$A \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\lambda_1 & \ldots & v_n\lambda_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \Lambda$$

$$TAT^{-1} = \Lambda$$
$$Te^{At}T^{-1} = e^{\Lambda t}$$

Om $\dot{x} = A$ så ger koordinatbytet $z = Tx$ att $\dot{z} = \Lambda x$.

Koordinatbyte forts

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB$$

Diagonalform (Parallellkoppling)

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix} z + Du$$

$$G(s) = \frac{\beta_1\gamma_1}{s - \lambda_1} + \ldots + \frac{\beta_n\gamma_n}{s - \lambda_n} + D$$

Partialbråksuppdelning

Styrbar form

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$sX_{k+1}(s) = X_k(s) \Rightarrow X_k(s) = s^{n-k}X_n(s), \quad k = 1, \ldots, n-1$$
$$\begin{pmatrix} s + a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} X(s) = U(s)$$
$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n)X_n(s) = U(s)$$

$$y = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix} x + Du$$
$$Y(s) = b_1X_1(s) + b_2X_2(s) + \cdots + b_nX_n(s) + DU(s)$$
$$= (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_n)X_n(s) + DU(s)$$

Tillståndsåterkoppling

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$u = -Lx + l_r r$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A - BL)x + Bl_r r \\ y = Cx \end{cases}$$

Tillståndsåterkoppling på styrbar form

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1-\tilde{l}_1 & -a_2-\tilde{l}_2 & \dots & -a_{n-1}-\tilde{l}_{n-1} & -a_n-\tilde{l}_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} l_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} x$$

$$p_i = a_i + \tilde{l}_i$$

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_n}{s^n + p_1 s^{n-1} + \ldots + p_n} l_r$$

Frihet att välja nämnare med L. Oförändrad täljare!

Nollställen och tillståndsåterkoppling

$$\begin{pmatrix} A-BL-zI & Bl_r \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-zI & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -L & Il_r \end{pmatrix}$$

Tappar rang för samma z. Samma nollställen!

Observerare

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + n \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\ \tilde{x} &= x - \hat{x} \\ \frac{d\tilde{x}}{dt} &= (A-KC)\tilde{x} - Kn \end{aligned}$$

Välj K för lagom snabbhet – brusinverkan

”Dualitet”

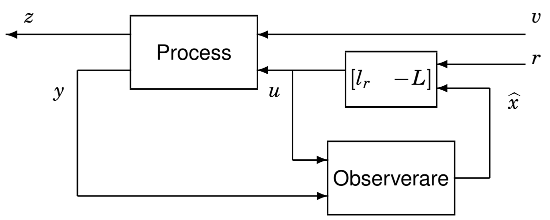
$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow A^T \\ B &\leftrightarrow C^T \\ L &\leftrightarrow K^T \end{aligned}$$

Observerbar form – $(A-KC)$ speciellt enkel

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z$$

Återkoppling från skattade tillstånd



Process: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + v(t)] \\ y(t) = Cx(t) + n(t) \end{cases}$

Observerare: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ u(t) = -L\hat{x}(t) + l_r r(t) \end{cases}$

Slutna systemets egenskaper

Eliminate u and y:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) - BL\hat{x}(t) + Bv(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) - BL\hat{x}(t) + K[Cx(t) - C\hat{x}(t)] + Kn(t) \end{aligned}$$

Introduce $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BL & BL \\ 0 & A-KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bv(t) \\ -Kn(t) \end{bmatrix}$$

Två slags poler för slutna systemet:

Processpoler:	$0 = \det(sI - A + BL)$
Observer poles:	$0 = \det(sI - A + KC)$

Exempel – Dubbelintegrator

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Välj tex

$$\det(sI - A + BL) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ l_1 & s + l_2 \end{pmatrix} = s^2 + s + 1$$

dvs $l_1 = 1, l_2 = 1$ och

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{pmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{pmatrix} = s^2 + 2s + 4$$

dvs $k_1 = 2, k_2 = 4$.

Exempel – Dubbelintegrator – forts

Processen $P(s) = \frac{1}{s^2}$ med återkopplingen

$$C(s) = L(sI - A + BL + KC)^{-1}K$$

ger slutna systemet överföringsfunktioner

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+PC} & \frac{C}{1+PC} \\ \frac{P}{1+PC} & \frac{PC}{1+PC} \end{bmatrix}$$

med Bode's amplituddiagram