

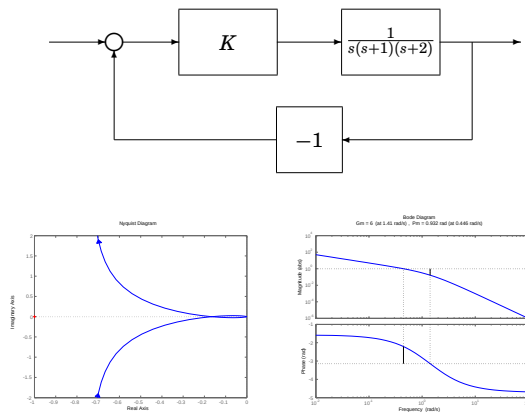
Förra veckan

- Den återkopplade förstärkaren - Nyquist
- Argumentvariationsprincipen
- Nyquistkriteriet
- Exempel
- Bodes relationer

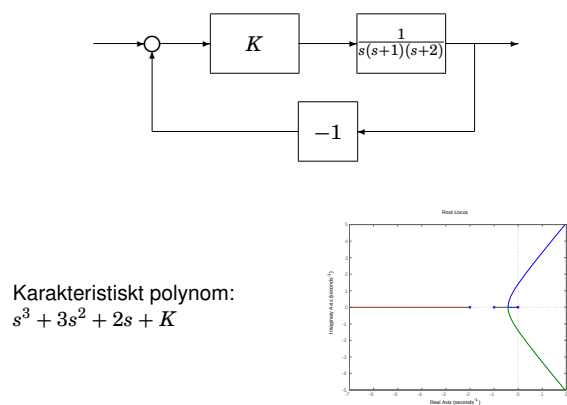
Dagens föreläsning

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- Linjärisering längs trajektoria
- Exempel: Sticksåg

Exempel: Vilka värden på K ger stabilitet?

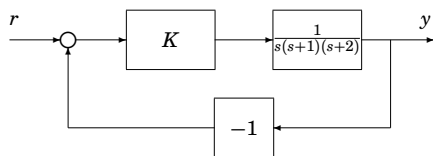


Exempel: Vilka värden på K ger stabilitet?



Karakteristiskt polynom:
 $s^3 + 3s^2 + 2s + K$

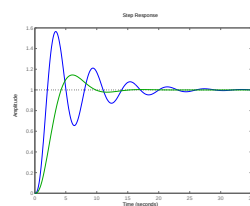
Stegsvar i referensföljning



Stegsvar från referens r till utsignal y :

$$\left(1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right)^{-1}$$

för $K = 1$ och $K = 3$:



Dagens föreläsning

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- Linjärisering längs trajektoria
- Exempel: Sticksåg

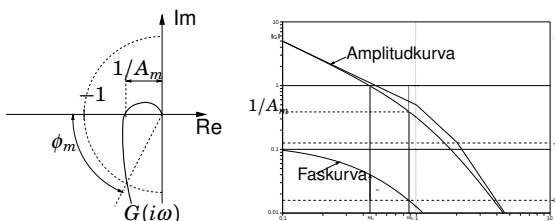
Amplitudmarginal och fasmarginal

Amplitudmarginal, A_m :

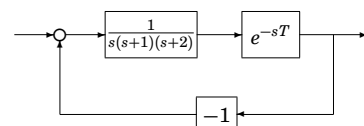
$$\arg G(i\omega_0) = -180^\circ, \quad |G(i\omega_0)| = \frac{1}{A_m}$$

Fasmarginal ϕ_m :

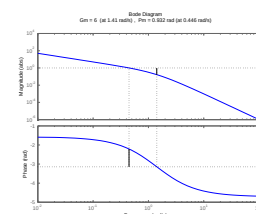
$$|G(i\omega_c)| = 1, \quad \arg G(i\omega_c) = \phi_m - 180^\circ$$



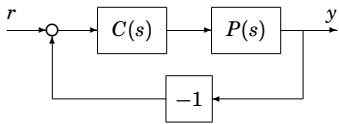
Mini-problem



Hur stor tidsfördröjningen T tillåts innan systemet blir instabilt?



Hur känsligt är slutna systemet T för ändringar i P ?



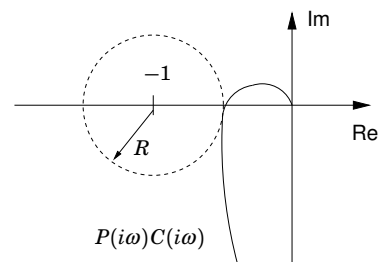
$$Y(s) = \frac{\overbrace{P(s)C(s)}^{T(s)}}{1 + P(s)C(s)} R(s)$$

Känslighetsfunktionen: $S(s) := \frac{d(\log T)}{d(\log P)} = \frac{dT/T}{dP/P} = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}$

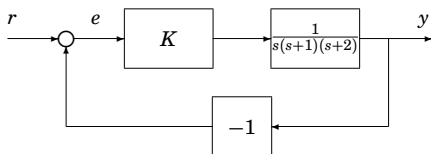
Illustration i Nyquistdiagrammet

Känslighetsfunktionen mäter Nyquistkurvens avstånd till -1 :

$$R^{-1} = \sup_{\omega} \left| \frac{1}{1 + P(i\omega)C(i\omega)} \right|$$



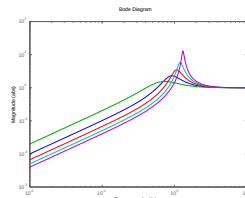
Minns Bodes integralformel !



Amplitudkurva från referens r till fel e :

$$\left(1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right)^{-1}$$

för $K = 1, 2, 3, 4, 5$:



Bodes Integralformel ("Vattensängseffekten")

Om krets förstärkningen $L = PC$ har relativt gradtal ≥ 2 och instabila poler $p_1, \dots, p_M$, gäller följande *konserveringslag* för känslighetsfunktionen $S = \frac{1}{1 + L}$:

$$\int_0^{+\infty} \log |S(i\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^M \operatorname{Re}(p_i)$$

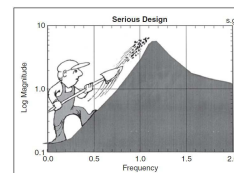


Figure 3. Sensitivity reduction at low frequency: unavoidably leads to sensitivity increase at higher frequencies.

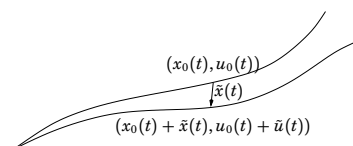
Dagens föreläsning

- Exempel: Proportionell återkoppling
- Marginaler och känslighet
- **Linjärisering längs trajektoria**
- Exempel: Sticksåg

Linjärisering längs trajektoria

Låt $(x_0(t), u_0(t))$ vara en lösning till $\dot{x} = f(x, u)$ och betrakta en närliggande lösning $(x(t), u(t)) = (x_0(t) + \tilde{x}(t), u_0(t) + \tilde{u}(t))$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x_0(t) + \tilde{x}(t), u_0(t) + \tilde{u}(t)) \\ &= f(x_0(t), u_0(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), u_0(t))\tilde{x}(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0(t), u_0(t))\tilde{u}(t) + O(\|\tilde{x}, \tilde{u}\|^2) \end{aligned}$$



Linjärisering, fortsättning

Alltså gäller för små $(\tilde{x}, \tilde{u})$, approximativt

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t)$$

där (om $\dim x = 2$, $\dim u = 1$)

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t), u_0(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))}$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0(t), u_0(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))}$$

Notera att $A(t)$ och $B(t)$ är **tidsberoende**! Däremot, om vi linjäriserar i en jämviktspunkt $(x_0(t), u_0(t)) \equiv (x_0, u_0)$ så är de tidsberoende.

Linjärisering, fortsättning

Linjärisering av utsignalekvationen

$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

längs den nominella utsignalen $y_0(t) = h(x_0(t), u_0(t))$ ges av

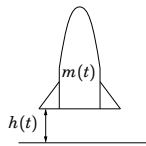
$$\tilde{y}(t) = C(t)\tilde{x}(t) + D(t)\tilde{u}(t)$$

där $\tilde{y}(t) = y(t) - y_0(t)$ och (om $\dim y = \dim x = 2$, $\dim u = 1$)

$$C(t) = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))}$$

$$D(t) = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0(t), u_0(t))}$$

Example: Raket



$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -g + \frac{v_e u(t)}{m(t)} \\ \dot{m}(t) &= -u(t)\end{aligned}$$

Let $u_0(t) \equiv u_0 > 0$; $x_0(t) = \begin{bmatrix} h_0(t) \\ v_0(t) \\ m_0(t) \end{bmatrix}$; $m_0(t) = m_0 - u_0 t$.

Linjärisering: $\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-v_e u_0}{m_0(t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v_e}{m_0(t)} \\ -1 \end{bmatrix} \tilde{u}(t)$

Linjära tidsberoende system — Varning!

Eigenvärdena för $A(t)$ kan **inte** användas för att avgöra stabilitet:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \cos^2 t & 1 - \alpha \sin t \cos t \\ -1 - \alpha \sin t \cos t & -1 + \alpha \sin^2 t \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

Eigenvärdena är konstanta

$$\lambda(t) = \lambda = \frac{\alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

med negativ realdel för $0 < \alpha < 2$. Dock, är lösningen

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{(\alpha-1)t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ -e^{(\alpha-1)t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} x(0),$$

obegränsad för $\alpha > 1$.

Dagens föreläsning

- ▶ Exempel: Proportionell återkoppling
- ▶ Stabilitet
- ▶ Robusthet
- ▶ Linjärisering längs trajektoria
- ▶ **Exempel: Sticksåg**

Exempel — Sticksågen

Kan vi stabilisera en inverterad pendel genom bara vertikala svängningar?



Sticksågen

Dynamik för inverterad pendel med sinusformad sågrörelse:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ell^{-1} (g + a\omega^2 \sin \omega t) \sin x_1 \end{cases}$$

Periodisk bana med periodtid $T = 2\pi/\omega$.

Linjärisering längs banan ger $\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t)$ där

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a\omega^2 \sin \omega t \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabilitet för pendel på sticksågen

Ingen analytisk lösning, men vi kan numeriskt bestämma en modell av formen

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t+T) \\ \tilde{x}_2(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(T) \\ \tilde{x}_2(T) \end{bmatrix}$$

För $a = 1\text{cm}$, $\ell = 17\text{cm}$, $\omega = 180$ fås

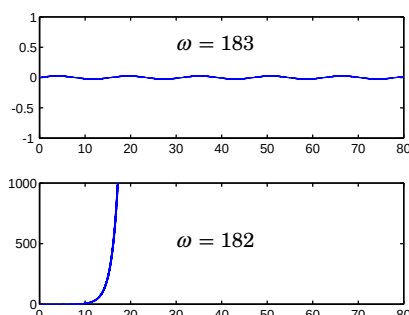
$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.37 & 0.035 \\ -3.86 & 0.630 \end{bmatrix}$$

med egenvärden (1.047, 0.955). Instabil!

Φ är stabil för $\omega > 183$

Sticksåg —Simulering

Simulering ger god överensstämmelse:



Dagens föreläsning

- ▶ Exempel: Proportionell återkoppling
- ▶ Marginaler och känslighet
- ▶ Linjärisering längs trajektoria
- ▶ **Exempel: Sticksåg**