



LUNDS
UNIVERSITET

Institutionen för
REGLERTEKNIK

Reglerteknik AK

Tentamen 28 oktober 2014 kl 8–13

Poängberäkning och betygssättning

Lösningar och svar till alla uppgifter skall vara klart motiverade. Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Poängberäkningen finns markerad vid varje uppgift.

Preliminära betygsgränser:

Betyg 3: 12 poäng
4: 17 poäng
5: 22 poäng

Tillåtna hjälpmedel

Matematiska tabeller (TEFYMA eller motsvarande), formelsamling i reglerteknik samt icke förprogrammerade räknare.

Tentamensresultat

Resultatet meddelas via LADOK. Tidpunkt och lokal för visning meddelas via kurshemsidan.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik AK

1. Ett linjärt tidsinvariant system beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y} - 2\dot{u} + 4\dot{y} + y = u.$$

- a. Bestäm systemets överföringsfunktion. (1 p)
- b. Av vilken ordning är systemet? (0.5 p)
- c. Är systemet asymptotiskt stabilt? (0.5 p)

Solution

- a. Laplacetransformera differentialekvationen:

$$s^3 Y(s) - 2sU(s) + 4s^2 Y(s) + Y(s) = U(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 1} U(s),$$

där överföringsfunktionen identifieras som

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^3 + 4s^2 + 1}$$

- b. Det karakteristiska polynomet, och således systemet, är av ordning 3.
- c. Nej. Stabilitetsvillkoren (se t.ex formelsamlingen) ger att systemet *inte* är asymptotiskt stabilt.

2. Betrakta ett system som ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + u^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 + 10 \\ y &= x_1 + 3\sqrt{x_2}\end{aligned}$$

där $x_1(t), x_2(t)$ är tillstånden, $u(t)$ är styrsignalen och $y(t)$ är utsignalen.

- a. Bestäm de stationära punkterna (x_1^0, x_2^0, u^0) , där x_1^0 och x_2^0 är funktioner av u^0 . (1 p)
- b. Låt $u^0 = 2$ och linjärisera systemet kring denna punkt. (1 p)
- c. Bestäm överföringsfunktionen för systemet från b, och utvärdera systemets stabilitetsegenskaper. (2 p)

Solution

- a. I stationäritet gäller att $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, vilket ger

$$0 = x_1^0 + (u^0)^2 \Leftrightarrow x_1^0 = -(u^0)^2.$$

Vidare gäller att

$$0 = (x_1^0)^2 - x_2^0 + 10 \Leftrightarrow x_2^0 = (u^0)^4 + 10.$$

b. Låt

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, u) &= x_1 + u^2 \\f_2(x_1, x_2, u) &= x_1^2 - x_2 + 10 \\g(x_1, x_2, u) &= x_1 + 3\sqrt{x_2}\end{aligned}$$

De partiella derivatorna är

$$\begin{array}{lll}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial f_1}{\partial u} = 2u \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 & \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} = 1 & \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{3}{2\sqrt{x_2}} & \frac{\partial g}{\partial u} = 0.\end{array}$$

Med $u^0 = 2$ är den stationära punkten $(x_1^0, x_2^0, u^0) = (-4, 26, 2)$. Sätt in de stationära värdena och inför variablerna

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_1^0 \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_2^0 \\ \Delta u &= u - u^0 \\ \Delta y &= y - y^0.\end{aligned}$$

Vi får det linjäriserade systemet

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\Delta x}_1 \\ \dot{\Delta x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c. Med de vanliga beteckningarna för A, B och C beräknas överföringsfunktionen enligt följande:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 8 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4s + 4 - \frac{48}{\sqrt{26}}}{(s-1)(s+1)}.$$

Eftersom en pol ligger i höger halvplan (+1), är systemet instabilt.

3. Ett system beskrivs av blockschemat i figur 1, där

$$G_R(s) = 2 \left(1 + \frac{1}{2s} \right) \quad G_P(s) = \frac{8}{s+3}$$

a. Bestäm överföringsfunktionen från r till e . (1 p)

b. Beräkna om möjligt det stationära felet då referenssignalen är en ramp som ges av $r(t) = \frac{2}{3}t$. (0.5 p)

Solution

- a.** Låt $G_o(s) = G_R(s)G_P(s)$. I Laplacedomänen ges felet av

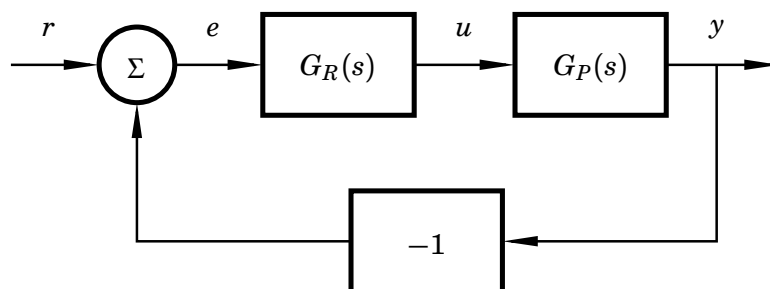
$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) = \left(1 - \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}\right) R(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} R(s) \\ &= \frac{s(s+3)}{s^2 + 19s + 8} R(s) \end{aligned}$$

Den sökta överföringsfunktionen är således

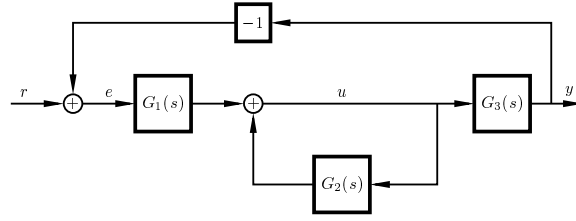
$$G_{er}(s) = \frac{s(s+3)}{s^2 + 19s + 8}.$$

- b.** Med $R(s) = \frac{2}{3s^2}$ får vi $sE(s) = \frac{(s+3)}{s^2+19s+8} \frac{2}{3}$. Polerna är i vänster halvplan, så gränsvärdet existerar och ges av

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{4}.$$

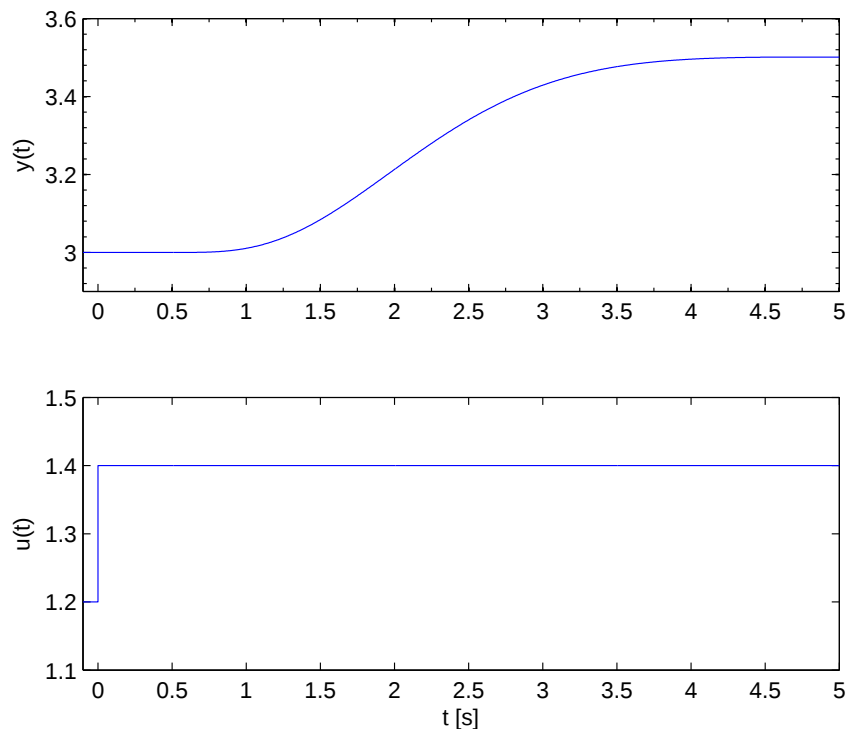


Figur 1 Blockschemat för uppgift 3.



Figur 2 Blockschema tillhörande uppgift 4.

4. En process som beskrivs av $G_3(s)$ skall regleras med den struktur som kan ses i figur 2. $G_1(s)$ och $G_2(s)$ är regulatorer.
 - a. Vad är överföringsfunktionerna från e till u samt från r till y ? (1 p)
 - b. Om man låter $G_1(s) = \alpha$ och $G_2(s) = \frac{1}{s\beta + 1}$ så blir överföringsfunktionen från e till u en välkänd regulator. Vilken? (1 p)
 - c. För att bestämma regulatorparametrarna hos en PID-regulator kan en inställningsmetod användas. Figur 3 visar mät- och styrsignal för ett stegsvarsförsök på $G_3(s)$. Använd Lambdametoden för att bestämma parametrarna hos en PID-regulator på parallellform. Låt $\lambda = T/2$. (2 p)
 - d. Hur avspeglar sig valet $\lambda = T/2$ i stegsvaret hos det återkopplade systemet när regulatorn från uppgift c används? (1 p)



Figur 3 Mät- och styrsignal för ett stegsvarsförsök på processen $G_3(s)$ i uppgift 4.

Solution

- a.** Överföringsfunktionen från e till u ges av

$$G_{ue}(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_2(s)} \quad (1)$$

och överföringsfunktionen mellan r och y av

$$G_{yr}(s) = \frac{G_1(s)G_3(s)}{1 - G_2(s) + G_3(s)G_1(s)}. \quad (2)$$

- b.** Med $G_1(s) = \alpha$ och $G_2(s) = \frac{1}{s\beta + 1}$ blir

$$G_{ue}(s) = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{s\beta + 1}} = \frac{\alpha(s\beta + 1)}{s\beta} = \alpha \left(1 + \frac{1}{s\beta} \right). \quad (3)$$

Vi ser att detta är detsamma som en PI-regulator med proportionalförstärkningen α och integraltiden β .

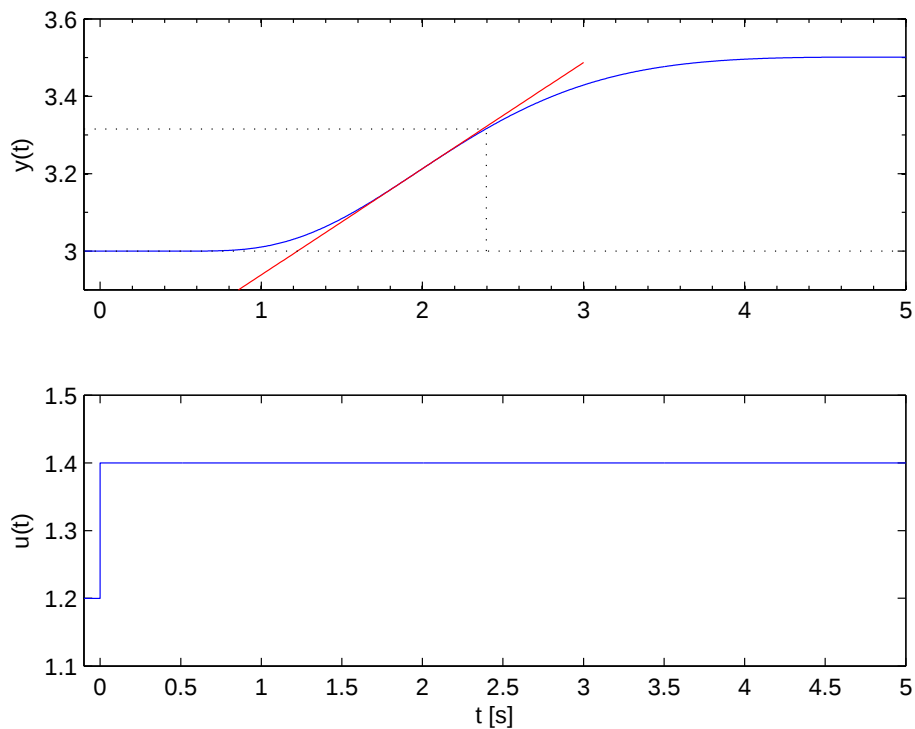
- c.** För metoden se föreläsningssanteckningarna, sida 107.

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{3.5 - 3}{1.4 - 1.2} = 2.5. \\ L &= 1.22 \\ T &= 1.17. \end{aligned} \quad (4)$$

Från dessa värden kan PID-regulatorns parametrar bestämmas

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{K_p} \frac{L/2 + T}{L/2 + \lambda} = 0.59 \\ T_i &= T + L/2 = 1.79 \\ T_d &= \frac{TL}{L + 2T} = 0.4. \end{aligned} \quad (5)$$

- d.** λ är, den approximativa, tidskonstanten hos det återkopplade systemet. Valet $\lambda = T/2$ innebär att det återkopplade systemet är ungefär dubbelt så snabbt som det öppna.



5. En process, med liknande dynamik som den tank vi studerat i laborationerna, kan beskrivas med

$$G_p(s) = \frac{13}{s + 3}$$

- Designa en PI-regulator för att reglera processen så att det slutna systemets båda poler hamnar i -4. (2 p)
- Bestäm den relativa dämpningen ζ för det reglerade systemet från a). (1 p)
- Då regulatorn innehåller en integraldel finns en risk för integratoruppvridning (integrator wind-up). Förklara kort begreppet integratoruppvridning och föreslå en åtgärd på problemet. (1 p)

Solution

- a. Regulatorn har överföringsfunktionen

$$G_r(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i}).$$

Det slutna systemets överföringsfunktion ges av

$$G_{cl} = \frac{G_p G_r}{1 + G_p G_r} = \frac{13K(s + \frac{1}{T_i})}{s^2 + (3 + 13K)s + \frac{13K}{T_i}}$$

Nämnumaren jämförs med det önskade karaktäristiska polynomet $(s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16$. Identifiering ger $K = \frac{5}{13}$ och $T_i = \frac{5}{16}$.

- b. Det karakteristiska polynomet är $s^2 + 8s + 16$. En jämförelse med $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ ger att ($\omega = 4$ och) $\zeta = 1$.
 - c. Se kurslitteraturen.
6. Avgör om följande påståenden är sanna, falska eller det inte finns tillräcklig information för att avgöra sanningshalten. Alla svar ska var tydlig motiverade. (2 p)
- a. En fasavancerande kompenseringslänk kan minska stationära fel.
 - b. En fasretarderande kompenseringslänk minskar alltid det stationära rampfelet med en faktor M .
 - c. Vid design av en fasavancerande kompenseringslänk kan man ej erhålla mer än 60° fasökning.
 - d. För att minska stationära fel och öka snabbheten hos ett system kan man kombinera en avancerande och en retarderande kompenseringslänk.

Solution

- a. Sant. Om $K_K > 1$ så ökar förstärkningen också för låga frekvenser och således minskar de stationära felen.
 - b. Falskt. Påstående är endast sant för system som innehåller en integrator.
 - c. Falskt. $N \geq 14$ ger större fasökning än 60° .
 - d. Sant. (Proceduren är välanvänd och kallas loop-shaping.)
7. Antag att vi vill styra en process där man kan mäta två utsignaler, $y_1(t)$ och $y_2(t)$ samt att vi kan mäta en störning d . Ett möjligt sätt att strukturera regulatorerna skulle kunna vara som i figur 4.
- a. Vilka regulatorstrukturer (förutom återkoppling) finns i representerade i figuren? (1 p)
 - b. Det första processteget är instabilt och kan beskrivas med

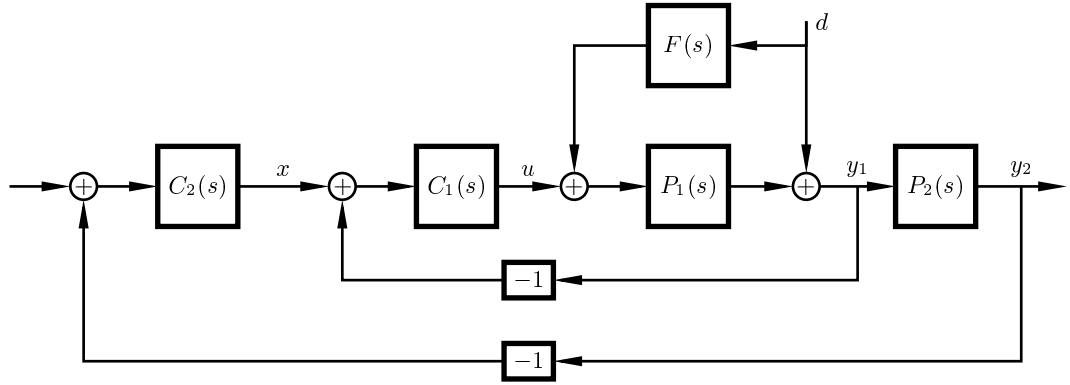
$$P_1(s) = \frac{s - 0.5}{(s - 2)^2}.$$

Kan man stabilisera den inre loopen med en P-regulator? Om så är fallet, för vilka förstärkningar är den inre loopen asymptotiskt stabil? (1.5 p)

- c. Hur skall $F(s)$ väljas för att helt eliminera inverkan av störningen d ? Kommentera huruvida detta är ett sunt val av $F(s)$. (1 p)

Solution

- a. Framkoppling och kaskadreglering.



Figur 4 Regulatorstruktur tillhörande uppgift 7.

- b.** Överföringsfunktionen från x till y_1 ges av

$$G_{y_1 x} = \frac{C_1(s)P_1(s)}{1 + C_1(s)P_1(s)} = \frac{K(s - 0.5)}{s^2 + (K - 4)s + 4 - 0.5K}. \quad (6)$$

Ett andra ordningens system är asymptotiskt stabilt om alla koefficienter i det karakteristiska polynomet är positiva dvs.

$$\begin{aligned} K - 4 &> 0 \\ 4 - 0.5K &> 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Ur dessa ekvationer ser vi att $4 < K < 8$ stabiliserar den inre loopen.

- c.** Om störningen helt skall elimineras måste bidraget från d helt undertryckas i signalen y_1 , dvs

$$1 + P_1(s)F(s) = 0 \quad (8)$$

ur vilken vi kan lösa ut

$$F(s) = -\frac{1}{P_1(s)} = -\frac{(s - 2)^2}{s - 0.5}. \quad (9)$$

Denna regulator är instabil och ickeproper, dvs gradtalet i täljaren är större än gradtalet i nämnaren. Den går således inte att realisera.

8. Vid Lunds kommunala reningsverk har en ingenjör kommit fram till att den pump som begränsar hur mycket dagvatten som pumpas in i reningsanläggningen kan beskrivas med överföringsfunktionen

$$P(s) = \frac{8}{(s+2)^2}.$$

Ett av problemen med den nuvarande P-regulatorn är att den dels är för långsam samt att den ger ett bestående reglerfel. För att komma åt dessa problem vill man istället använda en PI-regulator. Specifikationen på det nya reglersystemet säger att skärffrekvensen skall vara dubbelt så stor som den som erhöles vid P-reglering med $K = 1$. Vidare skall fasmarginalen vara 45° . Hur skall PI-regulatorns parametrar väljas för att möta specifikationen? Bodediagrammet för det öppna systemet med $K = 1$ kan ses i figur 5. (3 p)

Solution

Från Bodediagrammet, eller från beräkningar, ser vi att den ursprungliga skärffrekvensen är $\omega_c = 2$. Den nya skärffrekvensen skall således vara $\omega_c^* = 4$. PI-regulatorns överföringsfunktion kan skrivas som

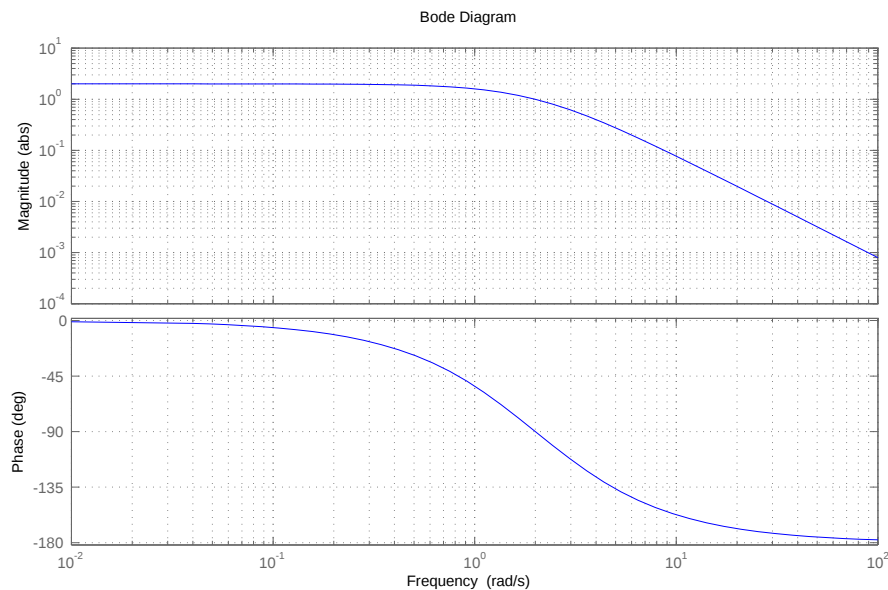
$$C(s) = \frac{K(1 + sT_i)}{sT_i} \quad (10)$$

och det öppna systemet, med PI-regulator, som $G(s) = C(s)P(s)$. Fasmarginalen ges av

$$\phi_m = 180^\circ + \arg G(i\omega_c^*) = 180^\circ - 90^\circ + \arctan(\omega_c^* T_i) + \arg(P(i\omega_c^*)) \quad (11)$$

Fasbidraget från processen kan utläsas direkt från Bodediagrammet eller beräknas som

$$\arg(P(i\omega_c^*)) = -2 \arctan\left(\frac{\omega_c^*}{2}\right) = -2 \arctan(2) = -126.9^\circ. \quad (12)$$



Figur 5 Bodediagrammet för det öppna systemet i uppgift 8.

Uttrycket för fasmarginalen ska vara 45° kan skrivas som

$$\varphi_m = -36.9^\circ + \arctan(4T_i) = 45^\circ \quad (13)$$

ur vilken vi kan lösa ut integraltiden

$$T_i = \frac{\tan(45^\circ + 36.9^\circ)}{4} = 1.75. \quad (14)$$

Då återstår bara att välja K så att ω_c^* är den nya skärfrekvensen. Det öppna systemets förstärkning är

$$|G(i\omega)| = |C(i\omega)| |P(i\omega)| = \frac{K \sqrt{1 + \omega^2 T_i^2}}{\omega T_i} \frac{8}{\omega^2 + 4}. \quad (15)$$

Att ω_c^* är systemets skärfrekvens innebär att

$$|G(i4)| = \frac{K \sqrt{1 + 16T_i^2}}{4T_i} \frac{8}{16 + 4} = 1 \quad (16)$$

ur vilken vi kan lösa ut

$$K = \frac{10T_i}{\sqrt{1 + 16T_i^2}} = 2.46. \quad (17)$$

Förstärkning hos processen vid den nya skärfrekvensen, $|P(i\omega_c^*)|$, kunde också ha läst av i Bodediagrammet.