Fb

Dagens idé

$$E\{ x(t+1) \mid \mathcal{Y}_t \}$$

är bäst

PREDIKTION OCH FILTRERING

- Prediktionsproblemet
- Förlustfunktionen
- Tre bra teorem
- Generella filterproblemet
- Tidskontinuerliga fallet
  Dualitet

Prediktion och filtrering

$y(t) = s(t) + n(t)$

brus

signal

$\hat{s}(t+\tau|t)$ prediktion

$\hat{s}(t|t)$ filtrering

$\hat{s}(t-\tau|t)$ utjämning (smoothing)

Generellare fall

- Modell
- Kriterium
- Tillåtna estimatorer

$\mathcal{Y}_t = [\, y^T(t_0) \; \ldots \; y^T(t) \,]$

Modell

$$\begin{cases} x(t+1) = \phi\, x(t) + v \\ y(t) = \Theta\, x(t) + e \end{cases}$$

Kriterium ℓ

- Allmän formulering

$$E\{\ell(s-\hat{s})\} = E_\eta\{E\,\ell(s-\hat{s})|\eta\}$$

$$P(s(t_1) \leq \sigma \mid y(\tau) = \eta(\tau)\ t_0 \leq \tau \leq t) = F(\sigma|\eta)$$

$f(\sigma|\eta)$ täthetsfkn

Theorem 2.1

- ℓ symmetrisk och icke avtagande för positiva argument
- $f(\sigma|\eta)$ symmetrisk runt $m = \int \sigma f(\sigma|\eta)\,d\sigma$

$\Rightarrow$ Bästa estimatet

$$\hat{s} = \hat{s}(\eta) = E(s|\eta) = \int \sigma f(\sigma|\eta)\,d\sigma$$

OBS Normalfördelning $\Rightarrow$ $E(s|\eta)$ linjärt i η $\Rightarrow$ Linjär estimator för alla ℓ

Flervariabel normalfördelning

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}(\det R)^{-1/2}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(x-m)^T R^{-1}(x-m)\right\}$$

Theorem 3.1 (Viktig)

x $n\times 1$ $\quad y$ $p\times 1$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in N\left(\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix}\right)$$

$$z = x - m_x - R_{xy}R_y^{-1}(y - m_y)$$

1) är oberoende av y

2) $Ez = 0$

3) $\mathrm{cov}(z) = R_z = R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx}$

Bevis:

Theorem 3.2 Också viktigt

x, y normalfördelade

1) $E(x|y) = m_x + R_{xy} R_y^{-1}(y - m_y)$

2) $E\{(x - E(x|y))(x - E(x|y))^T\} = R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{yx}$

3) y och $x - E(x|y)$ oberoende

Theorem 3.3

x, u, v normalförd u, v ober.

$$E\{x|u,v\} = E(x|u) + E(x|v) - E(x)$$

Vad betyder detta?

Th 2.1 $E(x|y) = \hat{x}$ bästa estimatet

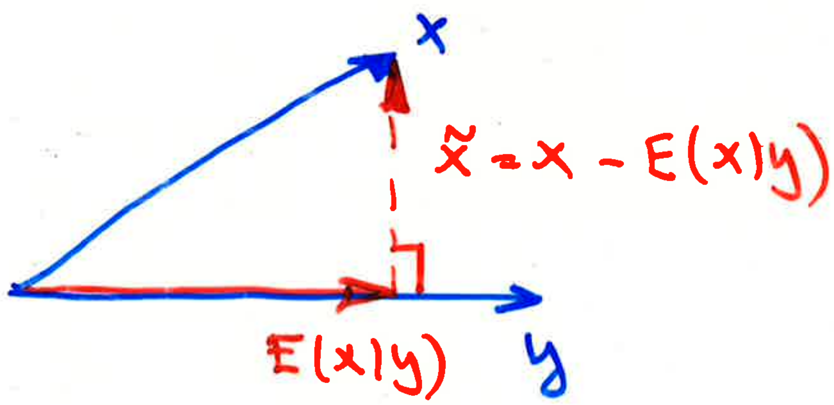
Th 3.2 $\hat{x} = m_x + R_{xy} R_y^{-1} (y - m_y)$

(linjär i y)

$E\, \tilde{x}\tilde{x}^T = R_x - R_{xy} R_y^{-1} R_{yx}$

$\tilde{x}$ oberoende av y

Geometrisk tolkning



TILLSTÅNDSESTIMERING

$$\begin{cases} x(t+1) = \phi x(t) + v(t) \\ y(t) = \theta x(t) + e(t) \end{cases}$$

Sätt bara igång och räkna!

$$\hat{x}(t+1|t) = E\{x(t+1) | y(t_0) \ldots y(t)\}$$

$$= E\{x(t+1) | \mathcal{Y}_t\}$$

$$= E\{x(t+1) | \mathcal{Y}_{t-1}, y(t)\}$$

$$\overset{?}{=} E\{x(t+1) | \mathcal{Y}_{t-1}, \tilde{y}(t)\}$$

$$\overset{\text{Th3.3}}{=} E\{x(t+1) | \mathcal{Y}_{t-1}\} + E\{x(t+1) | \tilde{y}(t)\} - E\{x(t+1)\}$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - E(y(t) | \mathcal{Y}_{t-1})$$

$$= \theta \tilde{x}(t) + e(t)$$

$\Rightarrow$ $\tilde{y}(t)$ & $\mathcal{Y}_{t-1}$ oberoende

INNOVATIONSREPRESENTATION

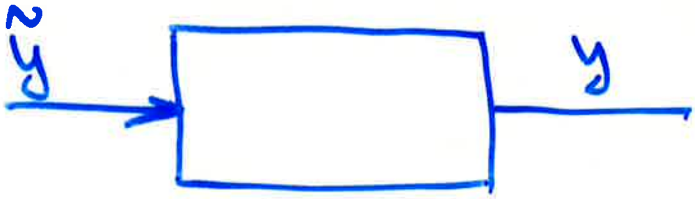
$\tilde{y}(t)$ innovationer

$$\tilde{y}(t) = y(t) - E(y(t)|\mathcal{Y}_{t-1}) = \Theta\tilde{x} + e(t)$$

$$\operatorname{cov}(\tilde{y}(t), \tilde{y}(s)) = \begin{cases} \Theta P \Theta^T + R_2 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

Kan representera $y(t)$ som

$$\hat{x}(t+1) = \phi\hat{x}(t) + K\tilde{y}(t)$$
$$y(t) = \Theta\hat{x}(t) + \tilde{y}(t)$$



Tidskont. estimering

Modell

$$\begin{cases} dx = Ax\,dt + dv \\ dy = Cx\,dt + de \end{cases}$$

Dualitet — Deterministiskt
reglerproblem
(Vet ej lösn. ännu!)

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z + C^T u$$

$$z^T(t_0) R_0 z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [z^T R_1 z + u^T R_2 u]\,dt$$

Teorem 6.2 Kalman - Bucy

$$\begin{cases} d\hat{x} = A\hat{x}\,dt + K[dy - C\hat{x}\,dt] \\ \hat{x}(t_0) = m \\ K = PC^T R_2^{-1} \\ \dot{P} = AP + PA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP \\ P(t_0) = R_0 \end{cases}$$